

ANALYSE IN MEER VARIABELEN

JUNI 26 2013, 13:30-16:30

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Als je een stelling gebruikt, laat dan zien dat aan alle voorwaarden is voldaan.
- Het is niet toegestaan computers, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

Exercise 1 (25 pt) Laat T de torus in \mathbb{R}^3 zijn die gegeven wordt door de parametrisatie

$$\Phi(\alpha, \theta) = ((2 + \cos \theta) \cos \alpha, (2 + \cos \theta) \sin \alpha, \sin \theta), \quad -\pi < \alpha, \theta \leq \pi.$$

- (a) (10 pt) Bereken $\text{vol}_2(T)$ en toon aan dat T ook 2-dimensionaal Jordan meetbaar is.

Laat C de kromme zijn op de torus T die we krijgen door voor een vaste waarde $p \in \mathbb{R}$ het beeld te nemen van

$$\gamma(t) = ((2 + \cos(pt)) \cos t, (2 + \cos(pt)) \sin t, \sin(pt)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) (5 pt) Bewijs dat C een gesloten kromme is op T dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$ (Hint, bekijk de periodiciteit van γ).
- (c) (10 pt) Stel een zo eenvoudig mogelijke integraal op waarmee je de lengte van C kunt berekenen (je hoeft deze integraal niet op te lossen) en bewijs dat C 1-dimensionaal Jordan meetbaar is dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$.

Exercise 2 (25 pt) Laat Ω de volle ellipsoïde in \mathbb{R}^3 zijn die gegeven wordt door

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} < 1 \right\}.$$

- (a) (10 pt) Bereken $\text{vol}_3(\Omega)$.
- (b) (5 pt) Bereken de uitwendige eenheidsnormaalvector $\nu(x_1, x_2, x_3)$ in het punt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$.
- (c) (10 pt) In het vorige deeltentamen moest je de afstand berekenen van de oorsprong tot het raakvlak in $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$. Het antwoord was:

$$d(0, T_x \partial\Omega) = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bereken

$$\int_{\partial\Omega} d(0, T_x \partial\Omega) d_2x.$$

Hint: Doe dit niet rechtstreeks, maar gebruik bijvoorbeeld de divergentiestelling van Gauss. Kies dan zelf een eenvoudig vectorveld zodat dit mooi uitkomt.

Exercise 3 (30 pt)

- (a) (**10 pt**) Laat $f(x) = (x_1, x_2, -2x_3)$ het vectorveld in \mathbb{R}^3 zijn en S_- en S_+ de twee halve-bolschillen

$$S_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \pm x_3 \geq 0\}.$$

ν_{\pm} is de eenheidsnormaalvector op S_{\pm} die naar boven gericht is. Bereken de twee integralen

$$\int_{S_{\pm}} \langle f, \nu_{\pm} \rangle d_2x$$

en laat zien dat het antwoord gelijk is.

- (b) (**10 pt**) **We willen dit nu generaliseren.**

Laat H_{\pm} twee hyperoppervlakken in \mathbb{R}^n zijn die geparametriseerd worden door

$$\Phi_{\pm}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \phi_{\pm}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})), \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 \leq 1.$$

ϕ_{\pm} beide C^2 , neem aan dat

$$\phi_-(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \leq \phi_+(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

en dat

$$H_+ \cap H_- = \partial H_+ = \partial H_-.$$

ν_{\pm} is de eenheidsnormaal op H_{\pm} die zo gekozen is dat de n^e -component $(\nu_{\pm})_n > 0$ is. Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een C^2 -vectorveld zijn met $\operatorname{div} f = 0$.

Bewijs dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle (y) d_{n-1}y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle (y) d_{n-1}y.$$

- (c) (**10 pt**) Laat ook ∂H_{\pm} in een hypervlak door de oorsprong liggen, dus

$$\partial H_{\pm} \subset V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = 0\} \quad \text{en ook } H_+ \cap V_a = H_- \cap V_a = \partial H_+ = \partial H_-.$$

Merk op dat $a_n \neq 0$ anders zijn H_- en H_+ geen hyperoppervlakken. Neem nu tevens aan dat

$$\langle f(x), a \rangle = 0 \quad \text{voor alle } x \in V_a.$$

Toon aan dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle (y) d_{n-1}y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle (y) d_{n-1}y = 0.$$