Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

2 februari 2023, 13:30–16:30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat T een theorie zijn met de volgende eigenschappen:

i) T heeft kwantoreliminatie.

ii) Er is een model M van T zodat voor elk model N van T, M isomorf is met een substructuur van N.

a) (5 pts) Bewijs dat T volledig is.

b) (5 pts) Laat zien dat voor het bewijs van a), voorwaarde ii) niet gemist kan worden.

Opgave 2. In deze opgave zijn steeds gegeven: een taal L, een L-structuur N en een substructuur M van N. Bepaal steeds of M een elementaire substructuur is van N. Motiveer je antwoord.

a) (2 pts) $L = \{<\}$, $N = \mathbb{R}$, $M = [0, 1)$ (met de gewone ordening).

b) (3 pts) $L = \{<\}$, $N = \mathbb{R}$, $M = (0, 1)$ (met de gewone ordening).

c) (2 pts) $L = \{f\}$ (f een 1-plaatsig functiesymbool), $N = \mathbb{Z}$ met $f^N(n) = n + 1$; $M = \mathbb{N}$ met $f^M(n) = n + 1$.

d) (3 pts) $L = L_{\text{rings}} = \{+, \cdot; 0, 1\}$, $N = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{N}$ (met standaard 0 en 1, en gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging).

Opgave 3. Een L-zin heet *universeel* als hij van de vorm

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

is met ϕ kwantorvrij (een rij universele kwantoren gevolgd door een kwantorvrije formule).

a) (5 pts) Laat zien: als N een L-structuur is en M een substructuur van N, dan geldt voor elke universele L_M-zin ψ: als $N \models \psi$ dan $M \models \psi$.

b) (3 pts) Laat nu $L = L_{\text{rings}}$ (zie opgave 2d)). Laat zien dat voor een ring N, opgevat als L-structuur, niet noodzakelijkerwijs elke substructuur van N ook een ring is.

c) (2 pts) Concludeer uit a) en b) dat niet elk axioma van de theorie van ringen universeel is; en geef aan welk axioma niet universeel is.

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3 pts) $\phi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\phi \to \chi)$

b) (4 pts) $\neg \forall x \phi(x) \vdash \exists x \neg \phi(x)$

c) (3 pts) $\exists x \neg \phi(x) \vdash \neg \forall x \phi(x)$

Opgave 5.

a) (5 pts) Laat zien: als $\{\beta\}$ een ordinaalgetal is, dan is $\beta = 0$.

b) (5 pts) Laat zien: als γ een ordinaalgetal is en $\{\beta\} \in \gamma$, dan is $\beta = 0$.