Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 16 maart 2023, 17:00–20:00

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1 Een *gerichte graaf* is een verzameling X met een binaire relatie R; als $(x, y) \in R$ dan denken we ons een pijl $x \to y$. Voor een deelverzameling A van X zeggen we dat $x \in X$ een *top* van A is, als $(a, x) \in R$ voor alle $a \in A$.

a) (6 pts) Stel X is een gerichte graaf. Bewijs met het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling A van X is die maximaal is m.b.t. de eigenschap dat elke eindige deelverzameling van A een top heeft.

b) (4 pts) Stel X en A zijn als in a). Laat zien: als $a \in X - A$, dan is er een eindige $A' \subseteq A$ zodat $A' \cup \{a\}$ geen top heeft.

Opgave 2 We beschouwen de taal $L = \{f, R\}$ waar f een 1-plaatsig functiesymbool is en R een 2-plaatsig relatiesymbool. Ook beschouwen we de L-structuur $\mathbb{R}$, waarbij $f^{\mathbb{R}}$ de functie $\sin(x)$ is, en $R^{\mathbb{R}}$ de relatie $<$ (dus voor reële getallen a, b geldt $\mathbb{R} \models R(a, b)$ precies als $a < b$). Geef voor elk van de drie getallen r hieronder een L-formule $\phi_r(x)$ die in $\mathbb{R}$ het getal r definieert:

a) (3 pts) r=0

b) (4 pts) r=1

c) (3 pts) r=π

Opgave 3. Laat L de taal $\{0, f\}$ zijn, met 0 een constante en f een 1-plaatsig functiesymbool. Zij T de L-theorie met de volgende axioma's:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$$
$$\forall x \neg (f(x) = 0)$$
$$\forall y (\neg (y = 0) \to \exists x (f(x) = y))$$

a) (3 pts) Bewijs: elk model van T is oneindig.

b) (3 pts) Schets twee aftelbare modellen van T die niet isomorf zijn.

c) (2 pts) Laat zien dat T κ-categorisch is, voor overaftelbare κ.

d) (2 pts) Bewijs dat de theorie T volledig is.

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3 pts) $\phi \to (\psi \vee \chi) \vdash (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \chi)$

b) (3 pts) $\forall y(\phi(y) \to \chi) \vdash \exists y \phi(y) \to \chi$ (waarbij de variabele y niet in χ voorkomt)

c) (4 pts) $(\phi \vee \psi) \vdash (\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$

Opgave 5. Laat zien dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn voor een verzameling A:

i) Er is een ordinaalgetal B zodat $A \subseteq B$.

ii) Elk element van A is een ordinaalgetal.