Exam Inleiding Topologie, February 2, 2023

- Every claim you make must be justified, either by argument or by citing a result from class. For example, if you are asked whether a certain space is a manifold, you have to prove that it is a manifold or prove that it is not a manifold – unless the example was explicitly shown in class to be or not to be a manifold, in which case you can cite it. Likewise: if you are asked for an example with a certain property, you have to prove that your example has this property, etc.
- Even if you cannot solve part (i) of a problem, you are allowed to use it in part (ii).
- You can answer in Dutch or English. In any case, write readable!

Problem 1 (1+5 points)**.** *Let $(X, \mathcal{T}_X)$ and $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be topological spaces.*

(i) For $A \subseteq X$, state the definition of the subspace topology on A.

(ii) Let $A, B \subseteq X$ be open subsets with $A \cup B = X$. Let $f\colon X \to Y$ be a map such that $f|_A\colon A \to Y$ and $f|_B\colon B \to Y$ are continuous, where we equip A and B with the subspace topology. Prove that f is continuous.

Problem 2 (3+4 points)**.** *Consider the set $\mathbb{N}$ of positive integers. Define $\mathcal{T}$ as the collection of all subsets of $\mathbb{N}$ of the form $U_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ for $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Show that $\mathcal{T}$ is not a topology, but one can make it into a topology by adding a single subset of $\mathbb{N}$.

(ii) Decide whether the resulting topological space is Hausdorff and whether it is second-countable (i.e. has a countable basis of topology).

Problem 3 (1+9+5 points). *Consider the subspaces*

- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$,
- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$,
- $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$,
- $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

of $\mathbb{R}^2$ *with the Euclidean topology.*

(i) *Sketch* $A_1, \ldots, A_4$.

(ii) *Which* A_i *are manifolds?*

(iii) *For every* $1 \leq i < j \leq 4$ *decide whether* A_i *and* A_j *are homeomorphic.*

Problem 4 (6 points). *Equip the set* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *of continuous functions from* $[0,1]$ *to* $\mathbb{R}$ *with the topology of uniform convergence, induced by the metric*

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} (|f(x) - g(x)|).$$

Show that there is no compact subset $K \subseteq \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *such that the functions*

$$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto nx$$

are contained in K *for all* $n \in \mathbb{N}$.

Problem 5 (4+4 points). *Let* $\mathbb{P}^2 = D^2/\sim$ *be the projective plane, with* $\sim$ *being the smallest equivalence relation such that* $x \sim (-x)$ *for all* $x \in S^1 = \partial D^2$.

(i) *Give an example of an embedding* $f \colon S^1 \to \mathbb{P}^2$ *such that* $\mathbb{P}^2 \setminus f(S^1)$ *is path-connected.*

(ii) *Give examples of embeddings* $f, g \colon S^1 \to \mathbb{P}^2$ *such that* $\mathbb{P}^2 \setminus f(S^1)$ *is not homeomorphic to* $\mathbb{P}^2 \setminus g(S^1)$.

Problem 6 (8 points). *Let* M *be the Möbius strip, i.e. the quotient of* $[0,1]^2$ *by the smallest equivalence relation* $\sim$ *on* $[0,1]^2$ *such that* $(0,t) \sim (1,1-t)$. *Define an action of the group* $(\mathbb{Z},+)$ *on* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *such that the quotient of* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *by this group action is homeorphic to* M. *(Here, we equip* $\mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ *with the subspace topology of the Euclidean topology.)*

Nederlandse versie

Problem 7 (1+5 points). *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes.*

(i) Voor een deelverzameling $A \subseteq X$, geef de definitie van de deelruimtetopologie op A.

(ii) Zij $A, B \subseteq X$ open deelverzamelingen met $A \cup B = X$. Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding zodat $f|_A\colon A \to Y$ en $f|_B\colon B \to Y$ continu zijn, waarbij we A en B met de deelruimtetopologie bekijken. Bewijs dat f continu is.

Problem 8 (3+4 points). *Bekijk de verzameling $\mathbb{N}$ van positieve gehele getallen. Definieer $\mathcal{T}$ als de collectie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ van de vorm $U_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ voor $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Bewijs dat $\mathcal{T}$ geen topologie is, maar men uit $\mathcal{T}$ een topologie kan maken door één deelverzameling van $\mathbb{N}$ toe te voegen.

(ii) Is de topologische ruimte van deel (i) Hausdorff? Is deze ruimte tweedstaftelbaar, d.w.z. heeft hij een aftelbare topologische basis?

Problem 9 (1+9+5 points). *Bekijk de deelruimtes*

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$,
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$,
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$,
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

van $\mathbb{R}^2$ met de euclidische topologie.

(i) Schets $A_1, \ldots, A_4$.

(ii) Welke A_i zijn variëteiten (manifolds)?

(iii) Bepaal voor iedere $1 \leq i < j \leq 4$ of A_i en A_j homeomorf zijn.

Problem 10 (6 points). *Bekijk de verzameling $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ van continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ met de topologie van uniforme convergentie, die door de metriek*

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} (|f(x) - g(x)|)$$

gedefinieerd kan worden. Bewijs dat er geen compacte deelruimte $K \subseteq \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ bestaat zodat de functies

$$f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto nx$$

elementen van K zijn voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Problem 11 (4+4 points). *Zij* $\mathbb{P}^2 = D^2/\sim$ *het projectieve vlak, waarbij* $\sim$ *de kleinste equivalentierelatie is zodat* $x \sim (-x)$ *voor alle* $x \in S^1 = \partial D^2$.

(i) Geef een voorbeeld van een inbedding $f\colon S^1 \to \mathbb{P}^2$ *zodat* $\mathbb{P}^2 \setminus f(S^1)$ *padsamenhangend is.*

(ii) Geef voorbeelden van inbeddingen $f, g\colon S^1 \to \mathbb{P}^2$ *zodat* $\mathbb{P}^2 \setminus f(S^1)$ *niet homeomorf met* $\mathbb{P}^2 \setminus g(S^1)$ *is.*

Problem 12 (8 points). *Zij* M *de Möbiusband, d.w.z. de quotiënt van* $[0,1]^2$ *naar de kleinste equivalentierelatie* $\sim$ *op* $[0,1]^2$ *zodat* $(0,t) \sim (1,1-t)$. *Definieer een actie van de groep* $(\mathbb{Z},+)$ *op* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *zodat de quotient van* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *met betrekking tot deze groepsactie homeomorf is met* M. *(Hier bekijken we* $\mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ *met de deelruimtetopologie van de euclidische topologie.)*