Retake Exam Inleiding Topologie, March 16, 2023

- Every claim you make must be justified, either by argument or by citing a result from class. For example, if you are asked whether a certain space is a manifold, you have to prove that it is a manifold or prove that it is not a manifold – unless the example was explicitly shown in class to be or not to be a manifold, in which case you can cite it. Likewise: if you are asked for an example with a certain property, you have to prove that your example has this property, etc.
- Even if you cannot solve (a part of) a problem, you are allowed to use it in a later (part of a) problem.
- You can answer in Dutch or English. In any case, write readable!

Problem 1 (3+4 points)**.** *Consider the set $\mathbb{Z}$ of integers. Define $\mathcal{T}$ as the collection of all subsets of $\mathbb{Z}$ containing 0.*

(i) Show that $\mathcal{T}$ is not a topology, but one can make it into a topology by adding a single subset of $\mathbb{Z}$.

(ii) Decide whether the resulting topological space is Hausdorff and whether it is second-countable. (If it is second-countable, you should give explictly a countable basis of topology; if it is not, you should show that this is impossible.)

Problem 2 (3+3 points)**.** *Let $(X, \mathcal{T}_X)$ and $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be topological spaces. Recall that $X \sqcup Y$ denotes their disjoint union. This is a set such that X and Y are subsets of $X \sqcup Y$, and we have $X \cup Y = X \sqcup Y$ and $X \cap Y = \varnothing$. Recall further that we equip $X \sqcup Y$ with the disjoint union topology $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$, which is defined as $\{U \subseteq X \sqcup Y : U \cap X \in \mathcal{T}_X \text{ and } U \cap Y \in \mathcal{T}_Y\}$.*

(i) Let $(Z, \mathcal{T}_Z)$ be a further topological space and $f\colon X \sqcup Y \to Z$ a function. Show that f is continuous if and only if $f|_X\colon X \to Z$ and $f|_Y\colon Y \to Z$ are continuous. (Use nothing but the definition of continuity and the axioms of a topological space.)

(ii) Show that if X and Y are compact, so is $X \sqcup Y$.

Problem 3 (1+4+12). *Consider the subspaces*

- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ or } (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

of $\mathbb{R}^2$ *with the Euclidean topology.*

(i) *Sketch* $A_1, \ldots, A_4$.

(ii) *Describe the interiors of* $A_1, \ldots, A_4$. *Which of these are connected?*

(iii) *For every* $1 \leq i < j \leq 4$ *decide whether* A_i *and* A_j *are homeomorphic.*

Problem 4 (6 points). *Give examples of two manifolds* X *and* Y *such that the one-compactification* X^+ *of* X *is a manifold, while the one-point compactification* Y^+ *of* Y *is not a manifold.*

Problem 5 (2+6). *Let* M *be the Möbius strip, i.e. the quotient of* $[0,1]^2$ *by the smallest equivalence relation* $\sim$ *on* $[0,1]^2$ *such that* $(0,t) \sim (1, 1-t)$.

(i) *Define an embedding* $f\colon S^1 \to M$ *such that the image* $f(S^1)$ *equals the set of equivalence classes of the points* (x,y) *with* $x = 0$ *or* 1, *and show that it is an embedding.*

(ii) *Consider* $X = (S^1 \times [0,1]) \sqcup M$ *with the disjoint union topology and let* $\simeq$ *be the smallest equivalence relation on* X *such that* $(x,0) \simeq f(x)$ *for* $(x,0) \in S^1 \times [0,1]$. *Denote by* Y *the quotient* $X/\simeq$ *with the quotient topology. (Informally, this is glueing a cylinder and a Möbius strip along a boundary curve.) Show that* Y *is homeomorphic to* M.

Problem 6 (6 points). *Let* (X,d) *be a compact metric space. Let* $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ *be an open cover of* X. *Show that there exists a* $\delta > 0$ *such that for every subset* $A \subseteq X$ *with* $d(a,b) < \delta$ *for all* $a, b \in A$, *there exists an index* i *with* $A \subseteq U_i$.

Nederlandse versie

Opgave 1 (3+4 punten). *Bekijk de verzameling $\mathbb{Z}$ van gehele getallen. Definieer $\mathcal{T}$ als de collectie van alle deelverzamelingen U van $\mathbb{Z}$ met $0 \in U$.*

(i) Bewijs dat $\mathcal{T}$ geen topologie is, maar men uit $\mathcal{T}$ een topologie kan maken door één deelverzameling van $\mathbb{Z}$ toe te voegen.

(ii) Is de topologische ruimte van deel (i) Hausdorff? Is deze ruimte tweedstaftelbaar? (Geef een aftelbare basis van topologie of bewijs dat dat niet mogelijk is!)

Opgave 2 (3+3 punten). *Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes en zij $X \sqcup Y$ hun disjuncte vereniging. Dit is een verzameling zodat X en Y deelverzamelingen van $X \sqcup Y$ zijn, $X \cup Y = X \sqcup Y$ en $X \cap Y = \varnothing$. We voorzien $X \sqcup Y$ van de topologie $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$ van disjuncte vereniging. Hij is gedefinieerd als $\{U \subseteq X \sqcup Y : U \cap X \in \mathcal{T}_X$ en $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y\}$.*

(i) Zij $(Z, \mathcal{T}_Z)$ een verdere topologische ruimte en $f\colon X \sqcup Y \to Z$ een functie. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als $f|_X\colon X \to Z$ en $f|_Y\colon Y \to Z$ continu zijn. (Gebruik niets dan de definitie van topologie en continue afbeelding.)

(ii) Bewijs dat $X \sqcup Y$ compact is als X en Y compact zijn.

Opgave 3 (1+6+10 points). *Bekijk de deelruimtes*

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ *of* $(x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

van $\mathbb{R}^2$ met de euclidische topologie.

(i) Schets $A_1, \ldots, A_4$.

(ii) Beschrijf het inwendige van $A_1, \ldots, A_4$. Welke inwendige zijn samenhangend?

(iii) Bepaal voor iedere $1 \leq i < j \leq 4$ of A_i en A_j homeomorf zijn.

Opgave 4 (6 punten). *Geef voorbeelden van variëteiten X en Y zodat de één-punt-compactificatie X^+ van X een variëteit is, maar de één-punt-compactificatie Y^+ van Y geen variëteit is.*

Opgave 5 (2+6 punten). *Zij M de Möbiusband, d.w.z. het quotiënt van $[0,1]^2$ naar de kleinste equivalentierelatie $\sim$ op $[0,1]^2$ zodat $(0,t) \sim (1,1-t)$.*

(i) Definieer een inbedding $f\colon S^1 \to M$ zodat het beeld $f(S^1)$ gelijk is met de verzameling van equivalentieklassen (x,y) met $x = 0$ of 1. (Vergeet niet te bewijzen dat f inderdaad een inbedding is!)

(ii) Bekijk $X = (S^1 \times [0,1]) \sqcup M$ met de topologie van disjuncte vereniging en zij $\simeq$ de kleinste equivalentierelatie op X zodat $(x,0) \simeq f(x)$ voor $(x,0) \in S^1 \times [0,1]$. Zij Y het quotiënt $X/\simeq$ met de quotiëntentopologie. (Informeel: we krijgen Y door een cylinder aan een Möbiusband te plakken.) Bewijs dat Y homeomorf is met M.

Opgave 6 (6 punten). *Zij (X,d) een compacte metrische ruimte. Zij $U_1,\dots,U_n \subseteq X$ een open overdekking van X. Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor iedere deelverzameling $A \subseteq X$ met $d(a,b) < \delta$ voor alle $a,b \in A$ er een index i bestaat met $A \subseteq U_i$.*