Docent: Yu.A. Kuznetsov
Assistants: S. Carrilo Santana, A. Rapoport, L. Timmers,
L. van de Pol, B. Jansen, M. van Leeuwen

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

13 april 2023, 13:30 – 16:30 uur

Opgave 1 [10 pt] Bepaal voor welke waarden van $a, b \in \mathbb{R}$ zijn alle reële oplossingen van

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

begrensd op $\mathbb{R}$, d.w.z. voor iedere oplossing $x \mapsto y(x)$ van (1) is er een constante $C > 0$ zodat $|y(x)| \leq C$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

De karakteristieke vergelijking voor (1) is

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

met de wortels

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a \pm \sqrt{D}}{2} \in \mathbb{C}$$

waarin $D = a^2 - 4b$. Er zijn drie gevallen:

(i) $D > 0$.
In dit geval $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, en de algemene reële oplossing van (1) is

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Dus is $y(x)$ onbegrensd, omdat $|y(x)| \to \infty$ voor of $x \to +\infty$ of $x \to -\infty$.

(ii) $D = 0$.
In dit geval $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$, en de algemene reële oplossing van (1) is

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Ook hier $|y(x)| \to \infty$ voor $x \to +\infty$ of $x \to -\infty$.

(iii) $D < 0$.
We hebben $\lambda_1 \neq \lambda_2$ met $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega \in \mathbb{C}$ waarin

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{-D}}{2} > 0.$$

In dit geval is de algemene reële oplossing van (1) gegeven door

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left[c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) \right], \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Als $\alpha \neq 0$ dan is $y(x)$ onbegrensd, omdat $c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ is 2π-periodiek en dus begrensd, maar $\mathrm{e}^{\alpha x} \to \infty$ voor of $x \to +\infty$ of $x \to -\infty$.
Als $\alpha = 0$, dan is de algemene reële oplossing van (1),

$$y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x), \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

begrensd op $\mathbb{R}$. Maar $\alpha = 0$ hoort bij $a = 0$, waaruit blijkt dat $D = -4b < 0$.
Conclusie: Alle reële oplossingen van (1) zijn begrensd dan en slechts dan als $a = 0$ en $b > 0$.

Opgave 2 [30 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(\mathrm{e}^{xA})$.

$$\det(\mathrm{e}^{xA}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Sp}(xA)} = \mathrm{e}^{x\mathrm{Sp}(A)} = \mathrm{e}^{0x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(b) [25 pt] Bereken e^{xA}.

Er zijn minstens twee methoden om e^{xA} te berekenen.

Methode I: De karakteristieke vergelijking van A is

$$\det(A - \lambda E) \;=\; \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \;=\; (\lambda^2+1)^2 \;=\; (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 \;=\; 0.$$

Deze vergelijking heeft twee dubbele wortels $\lambda_{1,2} = \pm i$. De matrix A heeft dus twee eigenwaarden $\lambda_{1,2} = \pm i$, beide met de algebraische multipliciteit 2. Zij

$$B \;=\; A - \lambda_1 E \;=\; A - iE = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

We hebben $\operatorname{rank} B = 3$, waaruit blijkt dat $\dim \operatorname{Ker} B = 4 - 3 = 1$ en dus bestaat er één Jordan-keten van lengte 2 voor de eigenwaarde $\lambda_1 = i$:

$$\begin{cases} Bv &= 0, \\ Bw &= v. \end{cases}$$

Neem een willekeurige

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

dan geldt

$$v = Bw = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iw_1 - w_2 \\ w_1 - iw_2 \\ -iw_3 - w_4 \\ 2w_1 + w_3 - iw_4 \end{pmatrix}$$

De vector $v \in \mathbb{C}^4$ moet aan $Bv = 0$ voldaan, ofwel

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iw_1 - w_2 \\ w_1 - iw_2 \\ -iw_3 - w_4 \\ 2w_1 + w_3 - iw_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -w_1 + iw_2 \\ -iw_1 - w_2 \\ -w_1 - w_3 + iw_4 \\ -2iw_1 - w_2 - iw_3 - w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

We moeten dus hebben

$$\begin{cases} -w_1 + iw_2 = 0, \\ -iw_1 - w_2 = 0, \\ -w_1 - w_3 + iw_4 = 0, \\ -2iw_1 - w_2 - iw_3 - w_4 = 0. \end{cases}$$

De algemene oplossing van dit stelsel is $w_1 = -w_3 + iw_4, w_2 = iw_3 + w_4$ met willekeurige w_3 en w_4. Met $w_3 = -1$ en $w_4 = 0$ krijgen we

$$w_1 = 1, w_2 = -i.$$

Dus

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Met deze vectoren, krijgen we twee *complexe* lineair-onafhankelijke oplossingen:

$$z^{(1)}(x) = \mathrm{e}^{ix} v = \mathrm{e}^{ix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z^{(2)}(x) = \mathrm{e}^{ix}(w + xv) = \mathrm{e}^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 + ix \\ x \end{pmatrix}.$$

De reële oplossingen

$$y^{(1)}(x) = \mathrm{Re}\ z^{(1)}(x) \ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad y^{(2)}(x) = \mathrm{Im}\ z^{(1)}(x) \ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

en

$$y^{(3)}(x) = \mathrm{Re}\ z^{(2)}(x) \ = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ -\cos x - x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix}, \quad y^{(4)}(x) = \mathrm{Im}\ z^{(2)}(x) \ = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \\ -\sin x + x\cos x \\ x\sin x \end{pmatrix}$$

zijn ook lineair-onafhankelijk. Dus is een fundamentale matrix voor $y' = Ay$

$$\Psi(x) = \ \left(y^{(1)}(x)\middle| y^{(2)}(x)\middle| y^{(3)}(x)\middle| y^{(4)}(x)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & \sin x & -\cos x \\ -\sin x & \cos x & -\cos x - x\sin x & -\sin x + x\cos x \\ \cos x & \sin x & x\cos x & x\sin x \end{pmatrix}$$

met

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad [\Psi(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte

$$\mathrm{e}^{xA} = \Psi(x)[\Psi(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ -x\sin x & \sin x - x\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x + x\cos x & -x\sin x & \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Methode II: In het stelsel $y' = Ay, \ y \in \mathbb{R}^4$, d.w.z.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

zijn de vergelijkingen voor (y_1, y_2) onafhankelijk van die voor (y_3, y_4):

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Zij

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

De stroming van (4) is well bekend (denk aan de harmonische oscillator):

$$\mathrm{e}^{xA_0} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

zo dat de oplossing $x \mapsto (y_1(x), y_2(x))$ van (4) met $y_1(0) = y_1^0$ en $y_2(0) = y_2^0$ is gegeven door

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \cos x - y_2^0 \sin x \\ y_1^0 \sin x + y_2^0 \cos x \end{pmatrix}. \tag{6}$$

De vergelijkingen voor (y_3, y_4) in het stelsel (3) zijn

$$\begin{pmatrix} y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_1(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

waarin $y_1(x) = y_1^0 \cos x - y_2^0 \sin x$ (zie (6)). Het stelsel (7) is een inhomogene stelsel

$$z' = A_0 z + b(x), \quad z = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

met A_0 gegeven door (5) en

$$b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y_1^0 \cos x - y_2^0 \sin x) \end{pmatrix}.$$

De oplossing van (8) is

$$z(x) = \mathrm{e}^{xA_0} z_0 + \mathrm{e}^{xA_0} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi A_0} b(\xi)\, d\xi, \quad z_0 = \begin{pmatrix} y_3(0) \\ y_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix}.$$

We hebben

$$\mathrm{e}^{-\xi A_0} b(\xi) = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y_1^0 \cos\xi - y_2^0 \sin\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_2^0 \sin^2\xi + 2y_1^0 \sin\xi\cos\xi \\ 2y_1^0 \cos^2\xi - 2y_2^0 \sin\xi\cos\xi \end{pmatrix}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^2\xi\, d\xi &= \int_0^x \frac{1-\cos 2\xi}{2}\, d\xi &&= \frac{x - \sin x\cos x}{2}, \\ \int_0^x \cos^2\xi\, d\xi &= \int_0^x \frac{1+\cos 2\xi}{2}\, d\xi &&= \frac{x + \sin x\cos x}{2}, \\ & \int_0^x \sin\xi\cos\xi\, d\xi &&= \frac{\sin^2 x}{2}. \end{aligned}$$

Met deze integralen,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\xi A_0} b(\xi)\, d\xi = \begin{pmatrix} -y_1^0 \cos^2 x + y_2^0 \sin x\cos x - y_2^0 x + y_1^0 \\ y_2^0 \cos^2 x + y_1^0 \sin x\cos x + y_1^0 x - y_2^0 \end{pmatrix},$$

en dan

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{xA_0} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi A_0} b(\xi)\, d\xi &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1^0 \cos^2 x + y_2^0 \sin x\cos x - y_2^0 x + y_1^0 \\ y_2^0 \cos^2 x + y_1^0 \sin x\cos x + y_1^0 x - y_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y_1^0 x\sin x + y_2^0(\sin x - x\cos x) \\ y_1^0(\sin x + x\cos x) - y_2^0 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\sin x & \sin x - x\cos x \\ \sin x + x\cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verder geldt

$$\mathrm{e}^{xA_0} z_0 = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix},$$

zo dat de algemene oplossing van (7) is

$$\begin{pmatrix} y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\sin x & \sin x - x\cos x \\ \sin x + x\cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Samen impliceren (6) and (9) dat

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ -x\sin x & \sin x - x\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x + x\cos x & -x\sin x & \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix},$$

waaruit volgt

$$\mathrm{e}^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ -x\sin x & \sin x - x\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x + x\cos x & -x\sin x & \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Opgave 3 [30pt] Beschouw de differentiaalvergelijking met variabele coëfficiënten

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u \;=\; 0, \quad x \in \,]0,\pi[. \tag{10}$$

(a) [5pt] Laat zien dat $x \mapsto u_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ een oplossing is van (10) op $]0,\pi[$.

We hebben

$$u_1(x) \;=\; \frac{\sin x}{x}, \quad u_1'(x) \;=\; \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \quad u_1''(x) \;=\; -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3}$$

en dus

$$u_1''(x) + \frac{2}{x}u_1'(x) + u_1(x) \;=\; -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3} + \frac{2}{x}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) + \frac{\sin x}{x} \;\equiv\; 0.$$

(b) [15pt] Vind een oplossing $x \mapsto u_2(x)$ van (10) op $]0,\pi[$, die geen scalair veelvoud is van $u_1(x)$. *Hint*: Zoek een oplossing met $u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Geef de algemene oplossing van (10) op $]0,\pi[$.

We kunnen proberen

$$u_2(x) \;=\; \frac{\cos x}{x}$$

zodat

$$u_2'(x) \;=\; -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}, \quad u_2''(x) \;=\; -\frac{\cos x}{x} + \frac{2\sin x}{x^2} + \frac{2\cos x}{x^3},$$

en dus

$$u_2''(x) + \frac{2}{x}u_2'(x) + u_2(x) \;=\; -\frac{\cos x}{x} + \frac{2\sin x}{x^2} + \frac{2\cos x}{x^3} + \frac{2}{x}\left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) + \frac{\cos x}{x} \;\equiv\; 0.$$

Dus is $x \mapsto u_2(x)$ inderdaad een oplossing van (10) op $]0,\pi[$. De oplossingen $u_1(x)$ en $u_2(x)$ zijn lineair onafhankelijk op $]0,\pi[$. Immers, voor de Wronski-determinaant geldt op $]0,\pi[$ dat

$$\det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{\sin x}{x}\left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right) - \frac{\cos x}{x}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \neq 0.$$

De oplossing u_2 kunnen we op twee reguliere manieren vinden.

Methode I: Zoek een oplossing in de vorm

$$u_2(x) \;=\; f(x)u_1(x), \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

(de variatie van constanten). De functie $f(x)$ voldoet dan op $]0,\pi[$ aan de differentiaalvergelijking

$$f''\sin x + 2f'\cos x = 0.$$

Hieruit folgt dat $g(x) = f'(x)$ een oplossing is van de lineaire differentiaalvergelijking

$$g' = -\frac{2\cos x}{\sin x}\ g.$$

De algemene oplossing van deze vergelijking is

$$g(x) \ = \ g_0 \exp\left(-2\int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos\xi}{\sin\xi} d\xi\right) \ = \ g_0 \exp\left(-2\ln(\sin\xi)|_{\pi/2}^{x}\right) \ = \ \frac{g_0}{\sin^2 x}.$$

Wegens de definitie van g, geldt op $]0,\pi[$

$$f(x) \ = \ f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_{\pi/2}^{x} g(\xi)d\xi \ = \ \int_{\pi/2}^{x} \frac{g_0}{\sin^2\xi}\ d\xi \ = \ -g_0 \left.\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\right|_{\pi/2}^{x} \ = \ -g_0\frac{\cos x}{\sin x}\ .$$

Dit impliceert dat

$$u_2(x) \ = \ f(x)u_1(x) \ = \ -g_0\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \ = \ -g_0\frac{\cos x}{x}$$

een oplossing van (10) is met willekeurige g_0. Met $g_0 = -1$ krijgen we dan de oplossing

$$u_2(x) = \frac{\cos x}{x}\ ,$$

die geen scalair veelvoud is van $u_1(x)$ op $]0,\pi[$.

Methode II: We kunnen de volgende formule op het interval $]0,\pi[$ direkt gebruiken:

$$u_2(x) \ = \ \frac{u_1(x)}{u_1(x_0)}u_2(x_0) + u_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{w(\xi)}{u_1^2(\xi)}d\xi$$

waarin $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Hier is $w(x)$ de Wronski-determinaant,

$$w(x) \ = \ \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix},$$

die in ons geval gelijk is aan

$$w(x) \ = \ w(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2}{\xi}d\xi\right) \ = \ w(x_0)\exp\left(-2\ln(\xi)|_{x_0}^{x}\right) \ = \ w(x_0)\frac{x_0^2}{x^2} \ = \ w(x_0)\frac{\pi^2}{4x^2}.$$

Laat $u_2'(x_0) = g_0$ willekeurig. Dan

$$w(x_0) \ = \ \det\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) \end{pmatrix} \ = \ \det\begin{pmatrix} 2/\pi & 0 \\ 4/\pi^2 & g_0 \end{pmatrix} = \frac{2g_0}{\pi}.$$

Dus

$$w(x) \ = \ \frac{\pi g_0}{2x^2}$$

en vervolgens

$$\int_{x_0}^{x} \frac{w(\xi)}{u_1^2(\xi)}d\xi \ = \ \frac{\pi g_0}{2}\int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{\xi^2}\frac{\xi^2}{\sin^2\xi}d\xi \ = \ \frac{\pi g_0}{2}\int_{\pi/2}^{x} \frac{1}{\sin^2\xi}d\xi \ = \ -\frac{\pi g_0}{2}\left.\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\right|_{\pi/2}^{x} \ = \ -\frac{\pi g_0}{2}\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Dit impliceert dat

$$u_2(x) \ = \ u_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{w(\xi)}{u_1^2(\xi)}d\xi \ = \ = \ -\frac{\pi g_0}{2}\frac{\sin x}{x}\ \frac{\cos x}{\sin x} \ = \ -\frac{\pi g_0}{2}\frac{\cos x}{x}$$

een oplossing op $]0,\pi[$ van (10) is met willekeurige g_0. De waarde $g_0 = -\frac{2}{\pi}$ geeft dan de oplossing van (10) op $]0,\pi[$, nl.

$$u_2(x) \ = \ \frac{\cos x}{x}\ ,$$

die geen scalair veelvoud is van $u_1(x)$.

We hebben er twee linear-onafhankelijk oplossingen van (10) op $]0,\pi[$:

$$u_1(x) \;=\; \frac{\sin x}{x} \qquad \text{en} \qquad u_2(x) \;=\; \frac{\cos x}{x}.$$

De algemene reële oplossing van (10) op $]0,\pi[$ is de lineaire combinatie van die oplossingen:

$$u(x) \;=\; c_1u_1(x)+c_2u_2(x) \;=\; \frac{1}{x}(c_1\sin x + c_2\cos x), \quad c_{1,2}\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

(c) [10pt] Hoeveel oplossingen heeft het inhomogene randwaardeprobleem

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''+\dfrac{2}{x}y'+y &=& \sin x,\\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y\left(\frac{2\pi}{3}\right) &=& 1, \end{array}\right. \tag{12}$$

op het interval $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$?

Beschouw het homogene randwaardeprobleem dat hoort by (12):

$$\left\{\begin{array}{rcl} u''+\dfrac{2}{x}u'+u &=& 0,\\ u\left(\frac{\pi}{2}\right)=u\left(\frac{2\pi}{3}\right) &=& 0, \end{array}\right. \tag{13}$$

De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is gegeven door (11), zie stap (b). De randvoorwarden zijn equivalent met

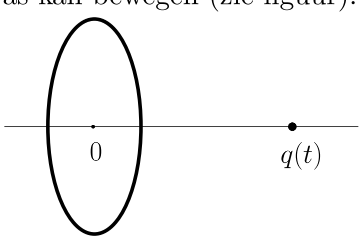
$$\begin{array}{rcl} u\left(\frac{\pi}{2}\right) &=& \frac{2}{\pi}c_1 \;=\; 0,\\ u\left(\frac{2\pi}{3}\right) &=& \frac{3}{2\pi}\left(c_1\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+c_2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \;=\; \frac{3}{2\pi}\left(c_1\frac{\sqrt{3}}{2}-c_2\frac{1}{2}\right) \;=\; 0. \end{array}$$

Hieruit volgt dat (c_1,c_2) aan het lineaire stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & 0,\\ c_1\sqrt{3} - c_2 &=& 0, \end{array}\right.$$

moeten voldaan. Dit stelsel heeft alleen maar de triviale oplossing: $c_1=c_2=0$. Het Alternatief van Fredholm impliceert dan dat het ingomogene randwaardeprobleem (12) precies één oplossing heet op het interval $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$.

Opgave 4 [30 pt] Beschouw een puntmassa die in het zwaartekrachtsveld van een hoepel langs zijn as kan bewegen (zie figuur).



De differentiaalvergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{2q}{(1+q^2)^{3/2}} \tag{14}$$

beschrijft de positie $q(t)$ van de puntmassa als functie van tijd.

(a) [5 pt] Laat zien dat (14) equivalent is met het stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{q} &=& v,\\ \dot{v} &=& -\dfrac{dU(q)}{dq}, \end{array}\right. \tag{15}$$

waarin

$$U(q) = -\frac{2}{\sqrt{1+q^2}}. \tag{16}$$

Inderdaad,

$$\ddot{q} \;=\; \dot{v} \;=\; \frac{d}{dq}\left(\frac{2}{\sqrt{1+q^2}}\right) \;=\; 2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+q^2)^{3/2}}\right)2q \;=\; -\frac{2q}{(1+q^2)^{3/2}},$$

zoals in (14).

(b) [5 pt] Bewijs dat (15) slechts één rustpunt heeft en bepaal het type van dit rustpunt.

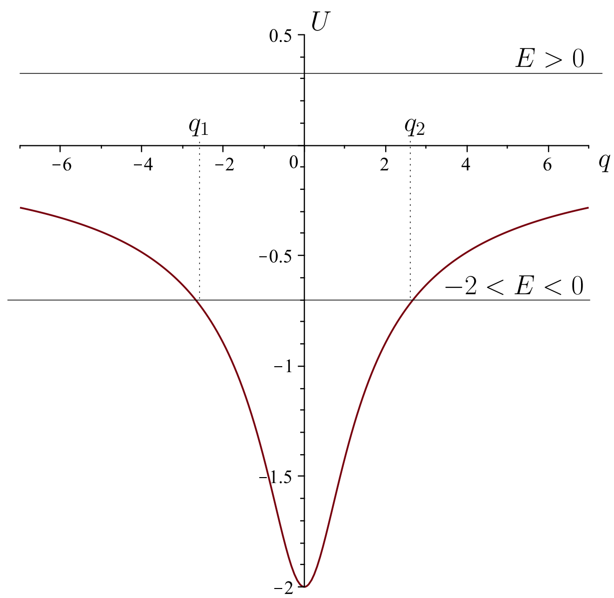
Ieder rustpunt van het mechanische stelsel (15) heeft de vorm $(q,v) = (q_0, 0)$, waarin q_0 een kritieke punt is van de potentiële energie $U(q)$:

$$U'(q_0) \;=\; 0.$$

De potentiële energie (16) heeft slechts één kritieke punt $q_0 = 0$ dat een kwadratisch minimum is. Immers, in omgeving van $q_0 = 0$ is de Taylor ontwikkeling van U gegeven door

$$U(q) \;=\; -2 + q^2 + O(q^4).$$

Hieruit blijkt dat $(0,0)$ een centrumpunt is voor (15) en dat alle banen in een omgeving van $(0,0)$ zijn gesloten.



Figuur 1: De grafiek van (16).

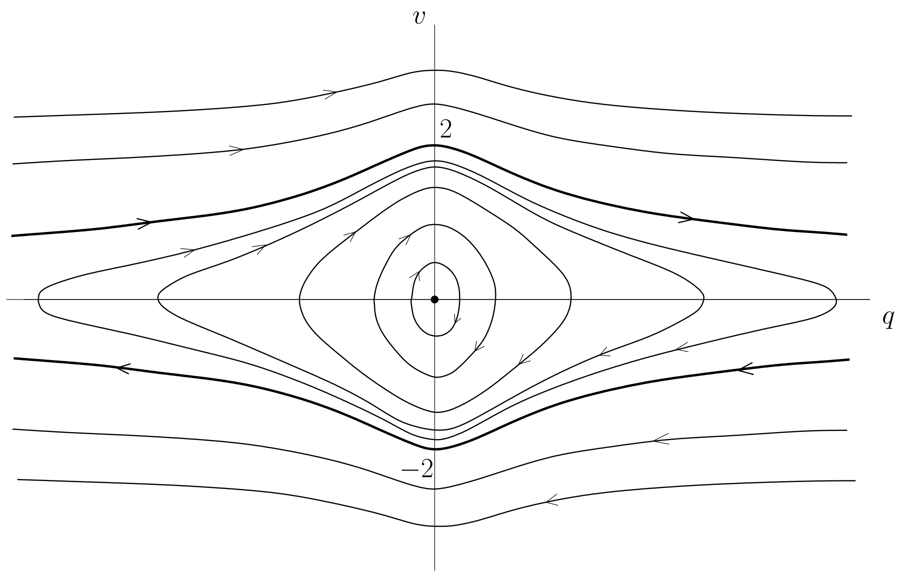
(c) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (15) in het (q,v)-vlak. Zet ook pijltjes! Beschrijf de bewegingen van het puntmassa die corresponderen met verschillende banen van (15).

De grafiek van $U(q)$ is geteken in Figuur 1. De functie U is negatief voor alle $q \in \mathbb{R}$, heeft één globale minimum in $q_0 = 0$, en convergeert monotoon naar $U_0 = 0$ als $q \to \pm\infty$.

De totale energie

$$\mathcal{E}(q,v) = \frac{v^2}{2} + U(q)$$

is een *constante van beweging* voor (15). Iedere niet-lege niveau-verzamelling $\mathcal{E}(q,v) = E$ bestaat uit één baan van (15). De baan met $E = -2$ is het rustpunt $(0,0)$. Iedere baan met $-2 < E < 0$ is gesloten en beschrijft periodieke oscillaties van de puntmassa in de potentiaal put rondom het rustpunt $q_0 = 0$. De banen met $E \geq 0$ zijn niet periodiek en corresponderen met flyby trajecten (zie Figuur 2).



Figuur 2: Het faseplaatje van (15).

(d) [10 pt] Voor welke waarden van v_0 is de oplossing $t \mapsto (q(t), v(t))$ van (15) met beginvoorwaarden $(q(0), v(0)) = (0, v_0)$ periodiek ?

Voor $-2 < E < 0$ heeft de vergelijking $U(q) = E$ twee wortels: $q_1 < 0$ en $q_2 > 0$. De niveau-verzamelling

$$\frac{v^2}{2} + U(q) = E$$

is een gesloten kromme die de vereniging is van twee symmetrische delen

$$v = \pm\sqrt{2(E - U(q))}, \quad q \in [q_1, q_2]$$

zonder rustpunten. Voor $E \geq 0$ zijn de krommen

$$v = \pm\sqrt{2(E - U(q))}, \quad q \in \mathbb{R}$$

niet gesloten. Twee krommen, die horen bij $E = 0$,

$$v = \pm\sqrt{-2(U(q)} = \pm\frac{2}{(1+q^2)^{1/4}} \equiv \pm V_0(q), \quad q \in \mathbb{R},$$

separeren periodieke en niet-periodieke banen (zie Figuur 2). Merk op dat $V_0(0) = 2$.

Dus is de oplossing van (15) met beginvoorwaarden $(q(0), v(0)) = (0, v_0)$ periodiek dan en slechts dan als

$$0 < |v_0| < 2.$$

Bonus Opgave [20 pt] Zij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Vind een 2×2 matrix B zo dat $\mathrm{e}^B = A$.

Methode I: De enkelvoudige eigenwaarden van matrix A zijn $\lambda_{1,2} = \pm i$. De bijbehorende eigenvectoren zijn gegeven door

$$v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad w := \bar{v} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix

$$P = (v \mid w) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

definieert de transformatie van A naar de (diagonale) Jordan normaalvorm

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Wegens $i = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}$, hebben we $\mathrm{e}^C = J$ met

$$C = \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Dus $\mathrm{e}^C = P^{-1}AP$ en $A = \mathrm{e}^{PCP^{-1}}$. Hieruit volgt dat

$$B = PCP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat $J, P, C \in M_2(\mathbb{C})$ niet eenduidig bepaald, dus $B \in M_2(\mathbb{C})$ ook niet. Onze keuze leidt tot reële $B \in M_2(\mathbb{R})$.

Methode II: Het stelsel

$$y' = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^2,$$

definieert de stroming

$$\mathrm{e}^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Nu merk op dat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}A}.$$

Dus $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}A} = A$, waaruit blijkt dat

$$B = \frac{\pi}{2}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$