Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 13 april 2023, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit vier reguliere opgaven en één bonus opgave. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw voor- en achternaam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [10 pt] Bepaal voor welke waarden van $a, b \in \mathbb{R}$ zijn alle reële oplossingen van

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

begrensd op $\mathbb{R}$, d.w.z. voor iedere oplossing $x \mapsto y(x)$ van (1) is er een constante $C > 0$ zodat $|y(x)| \le C$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 2 [30 pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(a) [5 pt] Vind $\det(\mathrm{e}^{xA})$.

(b) [25 pt] Bereken e^{xA}.

Opgave 3 [30pt] Beschouw de differentiaalvergelijking met variabele coëfficiënten

$$u'' + \frac{2}{x}u' + u \;=\; 0, \quad x \in \,]0, \pi[. \tag{3}$$

(a) [5pt] Laat zien dat $x \mapsto u_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ een oplossing is van (3) op $]0, \pi[$.

(b) [15pt] Vind een oplossing $x \mapsto u_2(x)$ van (3) op $]0, \pi[$, die geen scalair veelvoud is van $u_1(x)$. *Hint*: Zoek een oplossing met $u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Geef de algemene oplossing van (3) op $]0, \pi[$.

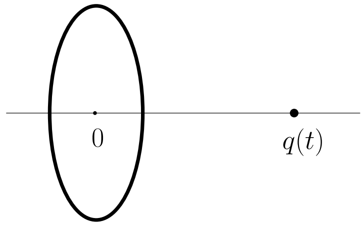
(c) [10pt] Hoeveel oplossingen heeft het inhomogene randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = \sin x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, \end{cases} \tag{4}$$

op het interval $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$?

Z.O.Z

Opgave 4 [30 pt] Beschouw een puntmassa die in het zwaartekrachtsveld van een hoepel langs zijn as kan bewegen (zie figuur).



De differentiaalvergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{2q}{(1+q^2)^{3/2}} \tag{5}$$

beschrijft de positie $q(t)$ van de puntmassa als functie van tijd.

(a) [5 pt] Laat zien dat (5) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= -\dfrac{dU(q)}{dq}, \end{cases} \tag{6}$$

waarin

$$U(q) = -\frac{2}{\sqrt{1+q^2}}. \tag{7}$$

(b) [5 pt] Bewijs dat (6) slechts één rustpunt heeft en bepaal het type van dit rustpunt.

(c) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (6) in het (q, v)-vlak. Zet ook pijltjes! Beschrijf de bewegingen van het puntmassa die corresponderen met verschillende banen van (6).

(d) [10 pt] Voor welke waarden van v_0 is de oplossing $t \mapsto (q(t), v(t))$ van (6) met beginvoorwaarden $(q(0), v(0)) = (0, v_0)$ periodiek ?

Bonus Opgave [20 pt] Zij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vind een 2×2 matrix B zo dat $e^B = A$.