Lichamen en Galoistheorie, 10 november 2022, 13:30 – 16:30 (17:00)

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat in het algemeen bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
In totaal zijn er 90 punten te behalen. **Er zijn 4 opgaven.**
Je mag géén gebruik maken van een vorm van het boek of van aantekeningen.
Veel succes!

1. (**15 pt**) Als K/F een lichaamsuitbreiding is, definiëren we een echt tussenlichaam E van K/F als een tussenlichaam ongelijk aan F en ongelijk aan K.

   Hieronder staat ζ_n voor een primitieve n-de machts eenheidswortel.

   (a) Hoeveel echte tussenlichamen heeft $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$?

   (b) Hoeveel echte tussenlichamen heeft $\mathbb{Q}(\zeta_{13})/\mathbb{Q}$?

   (c) Hoeveel echte tussenlichamen heeft $\mathbb{Q}(\zeta_{15})/\mathbb{Q}$?

2. (**24 pt**) Laat $\mathbb{F}_4$ een eindig lichaam zijn met 4 elementen. Laat G de groep zijn van matrices van de vorm
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   met $a \in \mathbb{F}_4^\times$ en $b \in \mathbb{F}_4$ (de groepsbewerking is vermenigvuldiging van matrices).

   (a) Hoeveel elementen heeft G ?

   (b) Bepaal de ordes van de (niet-triviale) Sylow-ondergroepen van G.

   (c) Definieer $\phi\colon G \to \mathbb{F}_4^\times$ door
$$\phi\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = a.$$
   Bewijs dat ϕ een groepshomomorfisme is en dat de kern van ϕ een Sylow-ondergroep van G is.

   (d) Bepaal het aantal Sylow-2-ondergroepen van G.

   (e) Bewijs dat de diagonale matrices in G een Sylow-ondergroep van G vormen die niet normaal is.

   (f) Bepaal het aantal Sylow-3-ondergroepen van G.

3. (**20 pt**) Voor elk lichaam F kan $x^3 - 2$ als element van $F[x]$ beschouwd worden. Hieronder komen vier vragen. Geef niet alleen de antwoorden, maar ook een *korte* motivatie. (En let goed op!)

   (a) Wat is de graad van het splijtlichaam van $x^3 - 2$ over $\mathbb{Q}$?

   (b) De derdemachten in $\mathbb{F}_7$ zijn 0, 1 en -1. Wat is de graad van het splijtlichaam van $x^3 - 2$ over $\mathbb{F}_7$?

   (c) De derdemachten in $\mathbb{F}_5$ zijn 0, 1, 2, 3 en 4. Wat is de graad van het splijtlichaam van $x^3 - 2$ over $\mathbb{F}_5$?

   (d) 4 is een wortel van $x^3 - 2$ in $\mathbb{F}_{31}$. Wat is de graad van het splijtlichaam van $x^3 - 2$ over $\mathbb{F}_{31}$?

Z.O.Z.

4. (**31 pt**)

(a) Laat zien dat elke lichaamsuitbreiding L/F van graad 2 normaal is.

(b) Laat $\alpha = (1+i)\sqrt[4]{7}$. Bereken α^2 en laat zien dat $\mathbb{Q}(\alpha)$ een normale uitbreiding is van $\mathbb{Q}(i\sqrt{7})$.

(c) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\alpha)$ géén normale uitbreiding is van $\mathbb{Q}$.

(d) Bepaal de normale afsluiting K van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$. Leg uit waarom dit een Galoisuitbreiding van $\mathbb{Q}$ is.

(e) Bepaal $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ en $H := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(i\sqrt{7}))$.

(f) Welke ondergroep van G hoort bij $\mathbb{Q}(\alpha)$?