Lichamen en Galoistheorie, 22 december 2022, 17:00 – 20:00 (20:30)

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
In totaal zijn er 90 punten te behalen.
Je mag géén gebruik maken van een vorm van het boek of van aantekeningen.
Veel succes!

1. (**9 pt**) Geef voor elk van de volgende beweringen aan of deze **waar** of **onwaar** is. Je hoeft bij deze opgave geen toelichtingen te geven.
   (a) Als K/F een Galoisuitbreiding is en E is een tussenlichaam, dan is K ook Galois over E.
   (b) Als K een eindig lichaam is met n elementen en d is een positieve deler van $n-1$, dan bevat de multiplicatieve groep $K^\times$ een element van orde d.
   (c) Zij K een lichaam. Een irreducibel polynoom in $K[x]$ is separabel.

2. (**10 pt**) Zij F een eindig lichaam en zij K een eindige uitbreiding van F. Leg uit waarom K een Galoisuitbreiding van F is.

3. (**16 pt**) Als K/F een lichaamsuitbreiding is, definiëren we een echt tussenlichaam E van K/F als een tussenlichaam ongelijk aan F en ongelijk aan K.

   Hieronder staat ζ_n voor een primitieve n-de machts eenheidswortel.
   (a) Bewijs dat $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) Bepaal voor elk van de drie echte tussenlichamen E van $\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}$ een element β met $E = \mathbb{Q}(\beta)$.
   (c) Bepaal een voortbrenger van $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_9)/\mathbb{Q})$.

4. (**25 pt**) Laat $\mathbb{F}_3$ een eindig lichaam zijn met 3 elementen. Laat G de groep zijn van matrices van de vorm
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
   met $a, c \in \mathbb{F}_3^\times$ en $b \in \mathbb{F}_3$ (de groepsbewerking is vermenigvuldiging van matrices).
   (a) Hoeveel elementen heeft G ?
   (b) Bepaal de ordes van de (niet-triviale) Sylow-ondergroepen van G.
   (c) Definieer $\phi\colon G \to \mathbb{F}_3^\times \times \mathbb{F}_3^\times$ door
$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = (a, c).$$
   Bewijs dat ϕ een groepshomomorfisme is en dat de kern van ϕ een Sylow-ondergroep van G is.
   (d) Bepaal het aantal Sylow-3-ondergroepen van G.
   (e) Bewijs dat de diagonale matrices in G een Sylow-ondergroep van G vormen die niet normaal is.
   (f) Bewijs dat G een centraal element van orde 2 bevat en bepaal het aantal Sylow-2-ondergroepen van G.

Z.O.Z.

5. (**30 pt**)

(a) Bewijs dat $x^4 - 2$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Laat $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}_{>0}$. Bewijs dat $K = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ het splijtlichaam is van $x^4 - 2$ over $\mathbb{Q}$.

(c) Bepaal $[K : \mathbb{Q}]$.

(d) Definieer $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ door $\sigma(\alpha) = i\alpha$ en $\sigma(i) = i$ en $\tau \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ door $\tau(\alpha) = \alpha$ en $\tau(i) = -i$. Bewijs dat σ en τ de Galoisgroep G van K over $\mathbb{Q}$ voortbrengen. Bewijs dat G niet abels is.

(e) Bewijs dat K een primitieve achtstemachts eenheidswortel ζ bevat. (Hint: schrijf $e^{2\pi i/8}$ als $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.)

(f) Bepaal de ondergroep H van G die correspondeert met het tussenlichaam $\mathbb{Q}(\zeta)$ van de uitbreiding $K/\mathbb{Q}$.

(g) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\zeta)$ de maximale abelse deeluitbreiding van $K/\mathbb{Q}$ is.