TENTAMEN VOOR MODULEN EN VOORSTELLINGEN
12 APRIL 2023, 13.30 - 16.30

TENTAMENVRAGEN

Vraag 1. (16 punten) Zij R een ring met 1 en M een linkse R-moduul.

Vraag 1a (8 punten): Zij $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ een groeiende rij van submodulen van M. Bewijs dat $\cup_{i=1}^{\infty} N_i$ ook een submoduul van M is.

Uitwerking: gebruik het submoduulcriterium. Ten eerste is $\cup_{i=1}^{\infty} N_i$ niet leeg, aangezien elke N_i niet-leeg is omdat het een submoduul is. Zij m_1, m_2 twee elementen van $\cup_{i=1}^{\infty} N_i$. Dan zijn er j_1, j_2 zodat $m_1 \in N_{j_1}$ en $m_2 \in N_{j_2}$. Stel zonder verlies van algemeenheid dat $j_2 > j_1$. Vanwege de groeiconditie op de N_i geldt dan dat $m_1, m_2 \in N_{j_2}$. Omdat N_{j_2} een submoduul is, geldt via het submoduulcriterium dat $m_1 + rm_2 \in N_{j_2}$ voor alle $r \in R$. Maar dan ook $m_1 + rm_2 \in \cup_{i=1}^{\infty} N_i$, dus de vereniging is een submoduul.

Zij $I \trianglelefteq R$ een ideaal van R. De k-de macht van I, genoteerd met I^k, wordt voortgebracht (als groep) door alle producten $i_1 \cdot \ldots \cdot i_k$ zodat $i_j \in I$ voor alle $1 \leq j \leq k$.
Beschouw

$$M' = \{a \in M : \text{ er bestaat een } k \text{ zodat } I^k a = 0\}.$$

Hierbij mag de macht k dus van het element a afhangen en betekent $I^k a = \{n \cdot a \text{ zodat } n \in I^k\}$.

Vraag 1b (8 punten): Bewijs dat M' een submoduul van M is.

Uitwerking: Gebruik weer het submoduulcriterium. Ten eerste is M' niet leeg omdat $0 \in M'$. Zij $m_1, m_2 \in M'$. Dan zijn er k_1, k_2 zodat $I^{k_1} m_1 = 0$ en $I^{k_2} m_2 = 0$. Stel zonder verlies van algemeenheid dat $k_2 > k_1$. Omdat $I^{k_2} = I^{k_1} I^{k_2 - k_1}$ volgt dan dat ook $I^{k_2} m_1 = I^{k_2 - k_1} I^{k_1} m = 0$. In het bijzonder geldt dan voor elke $n \in I^{k_2}$ dat $n \cdot (m_1 + rm_2) = n \cdot m_1 + r \cdot n \cdot m_2 = 0 + r \cdot 0 = 0$, dus ook $m_1 + rm_2 \in M'$.

Vraag 2. (18 punten) Zij $I = (5, X)$ het ideaal in $R = \mathbb{Z}[X]$ voortgebracht door 5 en X. Er geldt dat $R/I \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; we bekijken $R/I \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als een R-moduul via de natuurlijke actie:

$$R \times R/I \to R/I$$
$$(a, b + I) \mapsto ab + I.$$

Vraag 2a (8 punten): Bewijs dat de afbeelding

$$I \times I \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$
$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) \mapsto \frac{a_0 b_1}{5} \pmod 5$$

R-bilinear is.

Uitwerking: Noem de afbeelding φ en schrijf $f_1(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, $f_2(x) = c_0 + \ldots + c_k x^k$, $g_1(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ en $g_2(x) = d_0 + \ldots + d_l x^l$. We checken dat voor $r_1, r_2, r \in R$ geldt dat

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1) &= \frac{(r_1 a_0 + r_2 c_0) b_1}{5} \pmod 5 \\ &= r_1 \frac{a_0 b_1}{5} \pmod 5 + r_2 \frac{c_0 b_1}{5} \pmod 5 \\ &= r_1 \varphi(f_1, g_1) + r_2 \varphi(f_2, g_1)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\varphi(f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2) &= \frac{a_0 (r_1 b_1 + r_2 c_1)}{5} \pmod 5 \\ &= r_1 \frac{a_0 b_1}{5} \pmod 5 + r_2 \frac{a_0 c_1}{5} \pmod 5 \\ &= r_1 \varphi(f_1, g_1) + r_2 \varphi(f_1, g_2).\end{aligned}$$

– en dus dat

$$\begin{aligned}r\varphi(f_1, g_1) &= r \frac{a_0 b_1}{5} \pmod 5 \\ = \varphi(r f_1, g_1) &= \frac{(r a_0) b_1}{5} \pmod 5 \\ = \varphi(f_1, r g_1) &= \frac{a_0 (r b_1)}{5} \pmod 5.\end{aligned}$$

Het is hierbij belangrijk om op te merken dat r, r_1, r_2 zelf ook polynomen zijn in $\mathbb{Z}[x]$!

Voor een element $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R$ definiëren we de (formele) afgeleide als $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Vraag 2b (6 punten): Bewijs dat de afbeelding

$$\begin{aligned} I \otimes_R I &\to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ p(x) \otimes q(x) &\mapsto \frac{p(0) q'(0)}{5}\end{aligned}$$

een R-moduulhomomorfisme is.

Uitwerking: Voor polynomen $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ en $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ geldt dat $p(0) = a_0$ en $q'(x) = b_1 + b_2 x + \ldots + m b_m x^{m-1}$ zodat $q'(0) = b_1$. Deze afbeelding is dus de afbeelding uit onderdeel a, die vanwege onderdeel a bilineair is. Het volgt nu uit de universele eigenschap van tensorproducten dat de afbeelding in dit onderdeel een R-moduulhomomorfisme is.

Vraag 2c (4 punten): Bewijs dat $5 \otimes x \neq x \otimes 5$ in $I \otimes_R I$.

Uitwerking: als $5 \otimes x = x \otimes 5$, dan nemen deze simpele tensors dezelfde waarden aan onder de afbeelding uit onderdeel b. Beschouw dus eerst de functies $p(x) = 5$ en $q(x) = x$. Er geldt dat $p(0) = 5$ en $q'(x) = 1$ dus $q'(0) = 1$, dus onder de afbeelding uit onderdeel b wordt $5 \otimes x$ gestuurd naar $\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$. Als we aan de andere kant $p(x) = x$ en $q(x) = 5$ bekijken, dan vinden we $p(0) = 0$ en $q'(x) = 0$ dus $q'(0) = 0$, waardoor $x \otimes 5$ gestuurd wordt naar $\frac{0 \cdot 0}{5} = 0$. De elementen nemen dus niet dezelfde waarden aan en zijn daardoor niet hetzelfde element in $I \otimes_R I$.

Vraag 3. (16 punten) Bereken de rationale normaalvorm én Jordannormaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hint: bereken eerst de karakteristieke polynoom.

Uitwerking: de karakteristieke polynoom is $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$ met nulpunten $1, 1, -1, -1$. De minimaal polynoom is $(x-1)(x+1)^2$. Hieruit volgt dat er twee invariante factoren zijn: $a_1(x) = (x-1)$ en $a_2(x) = (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$. Dit levert door ontbinding de elementaire divisoren $(x-1)$, $(x-1)$, en $(x+1)^2$ op. We vinden dan de rationale normaalvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de Jordannormaalvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vraag 4. (25 punten) Geef voor elk van de volgende vijf uitspraken aan of ze waar of onwaar is. Licht je antwoord altijd toe, met een kort bewijs of (tegen)voorbeeld.
Je mag aannemen dat alle voorstellingen over $\mathbb{C}$ zijn.

Vraag 4a (5 punten): Als φ een tweedimensionale voorstelling is zodat voor alle $g \in G$ geldt dat $\varphi(g) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, dan is de voorstelling reducibel.

Uitwerking: WAAR. Een voorstelling van deze vorm is afbreekbaar (Lemma 11.1) en dus ook reducibel.

Vraag 4b (5 punten): Het kan zijn dat een groep G van orde 40 irreducibele voorstellingen heeft van respectievelijke graden $1, 1, 1, 1, 1, 1, 6$.

Uitwerking: ONWAAR. Het volgt uit de stelling van Wedderburn dat de kwadraten van de graden moeten optellen tot de kardinaliteit van de groep. Maar $1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+6^2 = 6 + 36 = 42 \neq 40$.

Vraag 4c (5 punten): Voor karakters χ_{V_1} en χ_{V_2} geldt dat $\chi_{V_1 \oplus V_2}$ gelijk is aan het product $\chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$.

Uitwerking: ONWAAR. Er geldt dat $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_V + \chi_W$ (dus de som in plaats van het product).

Vraag 4d (5 punten): Voor iedere kolom in een karaktertabel geldt dat het inproduct van de kolom met zichzelf gelijk is aan 1.

Uitwerking: ONWAAR. De orthogonaliteitsrelatie voor kolommen geeft dat het inproduct van een kolom horende bij een (vertegenwoordiger) g_j (van een conjugatieklasse $\mathscr{C}_j$) met zichzelf gelijk is aan $|C_G(g_j)| = |G|/|\mathscr{C}_j|$, d.w.z. de kardinaliteit van de centralisator van g_j.

Vraag 4e (5 punten): Als $H \leq G$ een ondergroep is en φ een voorsteling van G is van graad n, dan heeft de restrictie $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)$ ook graad n.

Uitwerking: WAAR. We hebben dat de graad van $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)$ gelijk is aan $\mathrm{Res}_H^G \chi_\varphi(1)$. Nu geldt dat $1 \in H$ dus $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)(1) = \varphi(1)$, dus $\mathrm{Res}_H^G \chi_\varphi(1) = \mathrm{tr}(\mathrm{Res}_H^G(\varphi)(1)) = \mathrm{tr}(\varphi(1)) = \chi_\varphi(1) = n$ is de graad van φ.

Vraag 5 (25 punten) Bekijk de alternerende groep A_4 van kardinaliteit 12 en haar voorstellingen over $\mathbb{C}$. Je mag gebruiken dat de conjugatieklassen de volgende vertegenwoordigers hebben:

$$1, \qquad (12)(34), \qquad (123), \qquad (132).$$

Vraag 5a (5 punten): Zij ζ een (primitieve) derdemachts eenheidswortel, d.w.z. een complex getal dat voldoet aan $\zeta^3 = 1$ (en $\zeta, \zeta^2 \neq 1$). Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi : A_4 &\to \mathbb{C}^\times \\ (12)(34) &\mapsto 1 \\ (123) &\mapsto \zeta \\ (132) &\mapsto \zeta^2 \end{aligned}$$

een ééndimensionale voorstelling van A_4 geeft.
Hint: je mag gebruiken dat $A_4/V_4 \simeq C_3$.

Uitwerking: De beperking van φ tot $C_3 \simeq \langle (123) \rangle$ is een ééndimensionale voorstelling omdat $\varphi((123))^3 = \zeta^3 = 1 = \varphi(1) = \varphi((123)^3)$ en $\varphi((132)) = \zeta^2 = \zeta^{-1} = \varphi((123)^{-1})$. Op $V_4 \simeq \langle (12)(34) \rangle$ geldt dat φ triviaal is, met andere woorden V_4 is bevat in de kern van φ. Van de hint weten we dat V_4 is een normale ondergroep van A_4 met $A_4/V_4 \simeq C_3$. We kunnen φ dus beschouwen als een gelifte voorstelling van C_3, van graad één.

Op een vergelijkbare manier vinden we een ééndimensionale voorstelling

$$\begin{aligned} \psi : A_4 &\to \mathbb{C}^\times \\ (12)(34) &\mapsto 1 \\ (123) &\mapsto \zeta^2 \\ (132) &\mapsto \zeta \end{aligned}$$

Vraag 5b (5 punten): Laat zien dat de karakters χ_φ en χ_ψ orthogonaal zijn.
Hint: je mag gebruiken dat $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.

Uitwerking: merk eerst op dat de conjugatieklassen van 1, $(12)(34)$, (123) en (132) respectievelijke kardinaliteiten $1, 3, 4, 4$ hebben. Dan volgt dat

$$\begin{aligned}\langle \chi_\varphi, \chi_\psi \rangle &= \frac{1}{12}\big(\chi_\varphi(1)\chi_\psi(1) + 3 \cdot \overline{\chi_\varphi((12)(34))}\chi_\psi((12)(34)) \\ &\quad + 4 \cdot \overline{\chi_\varphi((123))}\chi_\psi((123)) + 4 \cdot \overline{\chi_\varphi((132))}\chi_\psi((132))\big) \\ &= \frac{1}{12}\left(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot \zeta^2 + 4 \cdot \zeta \cdot \zeta\right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot (1 + \zeta + \zeta^2) = 0.\end{aligned}$$

Hieruit zien we dat de karakters orthogonaal zijn.

Vraag 5c (5 punten): Laat zien dat A_4 een irreducibele voorstelling over $\mathbb{C}$ heeft van graad 3.

Uitwerking: van bovenstaande onderdelen weten we dat er drie irreducibele voorstellingen van graad 1 zijn (φ, ψ en de triviale voorstelling). De kardinaliteit van A_4 is $24/2 = 12$. De stelling van Wedderburn vertelt ons dat $12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \sum_i n_i^2$ waarbij de n_i de graden van de overige irreducibele voorstellingen zijn. Echter zijn er in totaal evenveel irreducibele voorstellingen als het aantal conjugatieklassen in A_4, en dat aantal is 4. De enige mogelijkheid is dus dat er nog één andere irreducibele voorstelling is en dat die graad 3 heeft.

Vraag 5d (5 punten): Geef de volledige karaktertabel van A_4.

Uitwerking: de karaktertabel is een $4x4$ matrix die er als volgt uitziet – we weten alle rijen behalve de laatste, die volgt uit de orthogonaliteitsrelaties:

	1	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_φ	1	1	ζ	ζ^2
χ_ψ	1	1	ζ^2	ζ
χ_2	3	-1	0	0

We weten dat A_4 een ondergroep is van de alternerende groep A_5 van kardinaliteit 60. De conjugatieklassen van A_5 hebben de volgende vertegenwoordigers:

$$1, \qquad (12)(34), \qquad (123), \qquad (12345), \qquad (12354);$$

de kardinaliteiten van de conjugatieklassen zijn respectievelijk $1, 15, 20, 12, 12$.

Vraag 5e (5 punten): Bereken $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A_5}(\chi_\varphi)$, door haar waarden op elk van de vijf conjugatieklassen in A_5 te bepalen.

Uitwerking:

- Ten eerste geldt dat $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A^5}(\chi_\varphi)(1) = [A_5 : A_4]\chi_\varphi(1) = 5 \cdot 1 = 5$.
- In A_5 zijn er 15 paren van transposities, terwijl daarvan maar 3 in A_4 liggen, allemaal in dezelfde conjugatieklasse. Dus volgt uit Lemma 15.3 dat $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A^5}(\chi_\varphi)((12)(34)) = \frac{60}{15} \cdot (1 \cdot \frac{3}{12}) = 1$.
- In A_5 zijn er 20 3-cykels, waarvan er 8 in A_4 liggen, gelijk verdeeld over de conjugatieklassen van (123) en (132). Dus volgt uit Lemma 15.3 dat $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A^5}(\chi_\varphi)((123)) = \frac{60}{20} \cdot (\zeta \cdot \frac{4}{12} + \zeta^2 \cdot \frac{4}{12}) = (\zeta + \zeta^2) = -1$.

- Omdat (12345) en (12354) en hun geconjugeerden niet in A_4 liggen, geldt tenslotte dat $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A^5}(\chi_\varphi)((12345)) = 0$ en $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A^5}(\chi_\varphi)((12354)) = 0$.

EINDE VAN HET TENTAMEN