TENTAMEN VOOR MODULEN EN VOORSTELLINGEN
12 APRIL 2023, 13.30 - 16.30

TENTAMENVRAGEN

Vraag 1. (16 punten) Zij R een ring met 1 en M een linkse R-moduul.

Vraag 1a (8 punten): Zij $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ een groeiende rij van submodulen van M. Bewijs dat $\cup_{i=1}^{\infty} N_i$ ook een submoduul van M is.

Zij $I \trianglelefteq R$ een ideaal van R. De k-de macht van I, genoteerd met I^k, wordt voortgebracht (als groep) door alle producten $i_1 \cdot \ldots \cdot i_k$ zodat $i_j \in I$ voor alle $1 \leq j \leq k$.
Beschouw

$$M' = \{a \in M : \text{ er bestaat een } k \text{ zodat } I^k a = 0\}.$$

Hierbij mag de macht k dus van het element a afhangen en betekent $I^k a = \{n \cdot a \text{ zodat } n \in I^k\}$.

Vraag 1b (8 punten): Bewijs dat M' een submoduul van M is.

Vraag 2. (18 punten) Zij $I = (5, X)$ het ideaal in $R = \mathbb{Z}[X]$ voortgebracht door 5 en X. Er geldt dat $R/I \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; we bekijken $R/I \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ als een R-moduul via de natuurlijke actie:

$$R \times R/I \to R/I$$
$$(a, b + I) \mapsto ab + I.$$

Vraag 2a (8 punten): Bewijs dat de afbeelding

$$I \times I \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$
$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) \mapsto \frac{a_0 b_1}{5} \pmod 5$$

R-bilinear is.

Voor een element $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in R$ definiëren we de (formele) afgeleide als $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$.

Vraag 2b (6 punten): Bewijs dat de afbeelding

$$I \otimes_R I \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$
$$p(x) \otimes q(x) \mapsto \frac{p(0)q'(0)}{5}$$

een R-moduulhomomorfisme is.

Vraag 2c (4 punten): Bewijs dat $5 \otimes x \neq x \otimes 5$ in $I \otimes_R I$.

Vraag 3. (16 punten) Bereken de rationale normaalvorm én Jordannormaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hint: bereken eerst de karakteristieke polynoom.

Vraag 4. (25 punten) Geef voor elk van de volgende vijf uitspraken aan of ze waar of onwaar is. Licht je antwoord altijd toe, met een kort bewijs of (tegen)voorbeeld.
Je mag aannemen dat alle voorstellingen over $\mathbb{C}$ zijn.

Vraag 4a (5 punten): Als φ een tweedimensionale voorstelling is zodat voor alle $g \in G$ geldt dat $\varphi(g) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, dan is de voorstelling reducibel.

Vraag 4b (5 punten): Het kan zijn dat een groep G van orde 40 irreducibele voorstellingen heeft van respectievelijke graden $1, 1, 1, 1, 1, 1, 6$.

Vraag 4c (5 punten): Voor karakters χ_{V_1} en χ_{V_2} geldt dat $\chi_{V_1 \oplus V_2}$ gelijk is aan het product $\chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$.

Vraag 4d (5 punten): Voor iedere kolom in een karaktertabel geldt dat het inproduct van de kolom met zichzelf gelijk is aan 1.

Vraag 4e (5 punten): Als $H \leq G$ een ondergroep is en φ een voorsteling van G is van graad n, dan heeft de restrictie $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)$ ook graad n.

Vraag 5 (25 punten) Bekijk de alternerende groep A_4 van kardinaliteit 12 en haar voorstellingen over $\mathbb{C}$. Je mag gebruiken dat de conjugatieklassen de volgende vertegenwoordigers hebben:

$$1, \qquad (12)(34), \qquad (123), \qquad (132).$$

Vraag 5a (5 punten): Zij ζ een (primitieve) derdemachts eenheidswortel, d.w.z. een complex getal dat voldoet aan $\zeta^3 = 1$ (en $\zeta, \zeta^2 \neq 1$). Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \varphi : A_4 &\to \mathbb{C}^\times \\ (12)(34) &\mapsto 1 \\ (123) &\mapsto \zeta \\ (132) &\mapsto \zeta^2 \end{aligned}$$

een ééndimensionale voorstelling van A_4 geeft.
Hint: je mag gebruiken dat $A_4/V_4 \simeq C_3$.

Op een vergelijkbare manier vinden we een ééndimensionale voorstelling

$$\begin{aligned} \psi : A_4 &\to \mathbb{C}^\times \\ (12)(34) &\mapsto 1 \\ (123) &\mapsto \zeta^2 \\ (132) &\mapsto \zeta \end{aligned}$$

Vraag 5b (5 punten): Laat zien dat de karakters χ_φ en χ_ψ orthogonaal zijn.
Hint: je mag gebruiken dat $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.

Vraag 5c (5 punten): Laat zien dat A_4 een irreducibele voorstelling over $\mathbb{C}$ heeft van graad 3.

Vraag 5d (5 punten): Geef de volledige karaktertabel van A_4.

We weten dat A_4 een ondergroep is van de alternerende groep A_5 van kardinaliteit 60. De conjugatieklassen van A_5 hebben de volgende vertegenwoordigers:

$$1, \qquad (12)(34), \qquad (123), \qquad (12345), \qquad (12354);$$

de kardinaliteiten van de conjugatieklassen zijn respectievelijk $1, 15, 20, 12, 12$.

Vraag 5e (5 punten): Bereken $\mathrm{Ind}_{A_4}^{A_5}(\chi_\varphi)$, door haar waarden op elk van de vijf conjugatieklassen in A_5 te bepalen.

EINDE VAN HET TENTAMEN