Final exam

Inleiding Analyse in meer variabelen, Block 1, 2022/23

November 7, 2022

Instructions

- The exam is closed book. No “cheat sheet” is allowed.
- You are welcome to ask the people invigilating for clarifications regarding notation (or whatever else is unclear).
- There are Dutch and English versions of the exam. You may answer in either language.
- In your answers you can use whatever notation (from the dictaat or the lectures) you prefer.
- Write your name, surname, and student number in every sheet you use. Use a separate sheet for every exercise.

Pay attention to:

- Readability. Make sure your hand-writing is clear.
- Completeness. State clearly what results from the lecture (or the dictaat) you are using. Explain your reasoning towards the solution.
- Precision. Try to make your arguments streamlined and to the point. For each claim you make, use a separate sentence.

Exercises

Exercise 1 (2 points)**.** Let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be smooth. Consider the function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by $F(x, y) = f(x + g(y))$.

- Compute the first and second order derivatives of F in terms of those of f and g.
- Prove that F is C^2.
- Determine the critical points of F in terms of the behaviour of f and g.
- For each critical point: determine whether it is a minimum, a maximum, or neither. For each maximum/minimum, explain whether it is local or global.

Exercise 2 (1 point)**.** Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the function $f(x,y) = \sin(x)^5 y + \cos(y)x$. Consider the function $F(y) := \int_0^1 f(x,y)dx$.

- Prove that $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is smooth.
- Prove that $|F(y)| \leq |y| + \frac{1}{2}$.

Exercise 3 (1.5 points)**.** Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the function $f(x,y) := (x(1-x), y^2)$. Given $p = (1,1) \in \mathbb{R}^2$, determine the largest open $U \subset \mathbb{R}^2$ satisfying:

- U contains p,
- U is path-connected,
- $f|_U : U \to f(U)$ is a C^1-diffeomorphism.

Exercise 4 (2.5 points)**.** Consider the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ given by $f(x,y) := 2x^2 + y^2 + 3z^2$. Consider the function $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ given by $g(x,y) = x^2 - y^2 - z^2$. Define $M_a := g^{-1}(a)$ for each $a \in \mathbb{R}$.

- Prove that M_a is a submanifold for every $a \neq 0$.
- Find all the maxima and minima of $f|_{M_a}$, for all a. Indicate whether they are local or global.
- For $a \neq 0$, compute the Lagrange multipliers at each minimum/maximum.

Exercise 5 (2 points)**.** Let $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ be the covector field $\alpha(x,y,z) := (y \quad x \quad z^2)$. Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be the function $F(a,b) := (ab, a, b^2)$. Let $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ be the curve $\gamma(t) := (t^2, t^3, t)$.

- Is α exact? If so, provide a primitive.
- Compute $\int_\gamma \alpha$.
- Compute $F^*\alpha$.
- Is $F^*\alpha$ exact? If so, provide a primitive.

Exercise 6 (1 point)**.** Depending on $z \in \mathbb{C}$, determine whether the following series are convergent:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{(3n+1)!} z^n$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1} z^n$.

Instructies

- Dit is een gesloten boek tentamen: dictaat, aantekeningen, en "cheat sheets" mogen niet worden gebruikt.
- Als notatie (of iets anders) onduidelijk is, mag je het ons vragen.
- Er zijn Nederlandse en Engelse versies van het tentamen. Je mag beide talen in je antwoorden gebruiken.

- Je mag de notatie uit het dictaat of de lessen in je antwoorden gebruiken.
- Schrijf op elk blad je voornaam, achternaam en studentnummer. Gebruik een apart vel voor elke opgave.

Let op:

- Je handschrift moet leesbaar zijn.
- Geef duidelijk aan welke stellingen (uit het dictaat of de les) je gebruikt.
- Leg je redenering uit. Gebruik een aparte zin voor elke uitspraak die je doet.

Opgaven

Opgave 1 (2 punten)**.** Zij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gladde functies. We beschouwen de functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die door $F(x, y) = f(x + g(y))$ gedefineerd is.

- Geef de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van F in termen van de partiële afgeleiden van f en g.
- Toon aan dat F een C^2-functie is.
- Bepaal de kritieke punten van F in termen van f en g.
- Bepaal, voor elk kritiek punt, of het een minimum, een maximum, of geen van beide is. Bepaal, voor elk maximum/minimum, of het lokaal of globaal is.

Opgave 2 (1 punt)**.** Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie $f(x, y) = \sin(x)^5 y + \cos(y)x$. We definëren de functie $F(y) := \int_0^1 f(x, y)dx$.

- Toon aan dat $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glad is.
- Toon aan dat $|F(y)| \leq |y| + \frac{1}{2}$.

Opgave 3 (1.5 punten)**.** Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de functie $f(x, y) := (x(1 - x), y^2)$. Laat $p = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Vind het grootste open deel $U \subset \mathbb{R}^2$ dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

- $p \in U$,
- U is pad-samenhangend,
- $f|_U : U \to f(U)$ is een C^1-diffeomorfisme.

Opgave 4 (2.5 punten)**.** Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x, y) := 2x^2 + y^2 + 3z^2$. Beschouw de functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x, y) = x^2 - y^2 - z^2$. Defineer $M_a := g^{-1}(a)$ voor elke $a \in \mathbb{R}$.

- Toon aan dat M_a, voor elke $a \neq 0$, een submanifold is.
- Vind de maxima en minima van $f|_{M_a}$, voor elke a. Bepaal of zij lokaal of globaal zijn.
- Bereken de Lagrange multiplicatoren van elk minimum/maximum.

Opgave 5 (2 punten)**.** We definëren het covectorveld $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ door $\alpha(x, y, z) := (y \quad x \quad z^2)$. We defineren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ door $F(a, b) := (ab, a, b^2)$. Zij $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de kromme $\gamma(t) := (t^2, t^3, t)$.

- Is α exact? Zo ja, vind een primitieve.
- Bereken $\int_\gamma \alpha$.
- Bereken $F^*\alpha$.
- Is $F^*\alpha$ exact? Zo ja, vind een primitieve.

Opgave 6 (1 punt)**.** Voor welke complexe waarden $z \in \mathbb{C}$ zijn de volgende reeksen convergent?

- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{(3n+1)!} z^n$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1} z^n$.