Retake exam

Inleiding Analyse in meer variabelen, Block 1, 2022/23

December 19, 2022

Instructions

- The exam is closed book. No “cheat sheet” is allowed.
- You are welcome to ask the people invigilating for clarifications regarding notation (or whatever else is unclear).
- There are Dutch and English versions of the exam. You may answer in either language.
- In your answers you can use whatever notation (from the dictaat or the lectures) you prefer.
- Write your name, surname, and student number in every sheet you use. Use a separate sheet for every exercise.

Pay attention to:

- Readability. Make sure your hand-writing is clear.
- Completeness. State clearly what results from the lecture (or the dictaat) you are using. Explain your reasoning towards the solution.
- Precision. Try to make your arguments streamlined and to the point. For each claim you make, use a separate sentence.

Exercises

Exercise 1 (1.5 points)**.** Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by $f(x, y) := |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Compute the differential d_pf at each point $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- Prove that $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ is C^1.
- Is f differentiable at the origin $0 \in \mathbb{R}^2$?

Exercise 2 (1.5 points)**.** Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the function $f(x, y) := \cos(x)^2 \sin(y)^2 + x^2$. Define $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ using the formula $F(x, y) := \int_0^x f(a, y)da$.

- Prove that F is C^1.

- Compute the differential of F.
- Find all the critical points of F.

Exercise 3 (1.5 points)**.** Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the function $f(r, \theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Fix the point $p = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Determine an open $U \subset \mathbb{R}^2$ satisfying:

- U contains p,
- U is path-connected,
- $f|_U : U \to f(U)$ is a C^1-diffeomorphism,
- there is no strictly larger open $V \supset U$ satisfying the previous three properties.

Exercise 4 (2.5 points)**.** Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ be constants. Consider the function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ given by

$$f(x, y, z) := \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by + cz.$$

Consider the function $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ given by $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. For each $d > 0$:

- Prove that $M_d := g^{-1}(d)$ is a submanifold.
- Use the method of Lagrange multipliers to find all the critical points of $f|_{M_d}$.
- For each critical point of $f|_{M_d}$, indicate whether it is a maximum, a minimum, or neither. If they are maxima/minima, indicate whether they are local or global.

Exercise 5 (2 points)**.** Let $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ be the covector field $\alpha(x, y, z) := (-z \quad 1 \quad 0)$. Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be the function $F(a, b) := (a, b, 0)$. Let $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ be the curve $\gamma(t) := (t^2/2, t^3/3, t)$.

- Is α exact? If so, provide a primitive.
- Compute $\int_\gamma \alpha$.
- Is $F^*\alpha$ exact? If so, provide a primitive.
- Find a curve $\nu : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ such that $(\nu^*\alpha)(t) \neq 0$ for all $t \in [0, 1]$.

Exercise 6 (1 point)**.** Depending on $z \in \mathbb{C}$, determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2 + \sin(n)}$ is convergent or not.

Instructies

- Dit is een gesloten boek tentamen: dictaat, aantekeningen, en “cheat sheets” mogen niet worden gebruikt.
- Als notatie (of iets anders) onduidelijk is, mag je het ons vragen.
- Er zijn Nederlandse en Engelse versies van het tentamen. Je mag beide talen in je antwoorden gebruiken.
- Je mag de notatie uit het dictaat of de lessen in je antwoorden gebruiken.

- Schrijf op elk blad je voornaam, achternaam en studentnummer. Gebruik een apart vel voor elke opgave.

Let op:

- Je handschrift moet leesbaar zijn.
- Geef duidelijk aan welke stellingen (uit het dictaat of de les) je gebruikt.
- Leg je redenering uit. Gebruik een aparte zin voor elke uitspraak die je doet.

Opgaven

Opgave 1 (1.5 points)**.** Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie $f(x, y) := |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Bereken de totale afgeleide $d_p f$ in elk punt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- Toon aan dat $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ C^1 is.
- Is f (totaal) differentieerbaar in de oorsprong $0 \in \mathbb{R}^2$?

Opgave 2 (1.5 points)**.** Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie $f(x, y) := \cos(x)^2 \sin(y)^2 + x^2$. We definëren de functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $F(x, y) := \int_0^x f(a, y) da$.

- Toon aan dat F C^1 is.
- Bereken de totale afgeleide van F.
- Vind de kritieke punten van F.

Opgave 3 (1.5 points)**.** Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de functie $f(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Laat $p = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Vind en open deel $U \subset \mathbb{R}^2$ dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

- $U \ni p$,
- U is pad-samenhangend,
- $f|_U : U \to f(U)$ is een C^1-diffeomorfisme,
- er is geen open deel $V \supsetneq U$ dat voldoet aan de drie voorgaande voorwaarden.

Opgave 4 (2.5 points)**.** Laat $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y, z) := \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by + cz.$$

Beschouw de functie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Voor elke $d > 0$:

- Toon aan dat $M_d := g^{-1}(d)$ een submanifold is.
- Gebruik de methode van Lagrange multiplicatoren om de kritieke punten van $f|_{M_d}$ te vinden.
- Voor elk kritiek punt van $f|_{M_d}$, bepaal of het een maximum, een minimum of geen van beide is. Bepaal of the maxima/minima lokaal of globaal zijn.

Opgave 5 (2 points)**.** We definëren het covectorveld $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ door $\alpha(x, y, z) := (-z \quad 1 \quad 0)$. We definëren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ door $F(a, b) := (a, b, 0)$. Zij $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de kromme $\gamma(t) := (t^2/2, t^3/3, t)$.

- Is α exact? Zo ja, vind een primitieve.
- Bereken $\int_\gamma \alpha$.
- Is $F^*\alpha$ exact? Zo ja, vind een primitieve.
- Vind een kromme $\nu : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zo dat $(\nu^*\alpha)(t) \neq 0$ voor elk $t \in [0, 1]$.

Opgave 6 (1 point)**.** Voor welke complexe waarden $z \in \mathbb{C}$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2 + \sin(n)}$ convergent?