F. Ziltener

2022/ 2023, blok 4
27 juni, 2023

Analyse in meer variabelen, WISB212

Tentamen

achternaam: ______________________ voornaam: ______________________

studentnummer: ____

Het tentamen duurt 180 minuten.

Aanwijzingen:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Lever ook dit voorblad in.**
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt oplossen, mag je dit onderdeel in het vervolg wel gebruiken.

25 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Voor verdere aanwijzingen z.o.z.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
/3	/5	/7	/14	/4	/5	/4	/13	/8	/63

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat (d.w.z. (hulp-)stelling, propositie of gevolg) uit het hoorcollege, de cursusboeken en het vak Analyse (in één variabele) gebruiken, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Een bepaalde functie is differentieerbaar/ glad (als dit inderdaad het geval is), tenzij anders aangegeven.
- Elke bilineaire afbeelding is glad.
- een formule voor de afgeleide van een bilineaire afbeelding
- een formule voor de afgeleide van de inverse van een C^1-diffeomorfisme
- een formule voor de positieve oriëntatie van de rand van een C^1-domein in $\mathbb{R}^2$
- Een bepaalde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is een glad domein (als dit inderdaad het geval is).
- wat de rand van een bepaald glad domein in $\mathbb{R}^n$ is
- een formule voor de naar buiten wijzende coöriëntatie van de rand van een glad domein
- Het drie-dimensionale volume van de sfeer S^3 is $2\pi^2$.

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

Opgave 1 (afgeleiden van een lineaire afbeelding, 3 pt)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$ en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat f glad is en bereken $D^k f$ voor elke $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 2 (afgeleide van functie, 5 pt)**.** Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inwendig product op $\mathbb{R}^n$. We definiëren de functie

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Laat zien dat deze functie differentieerbaar is en bereken haar afgeleide.

We duiden met $\| \cdot \|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^n$ aan.

Opgave 3 (stelsel van vergelijkingen, 7pt)**.** (i) Laat zien dat er reële getallen $r, r' > 0$ met de volgende eigenschappen bestaan: Voor elke $y \in \mathbb{R}^2$ zó, dat $\big\| y - (1,1) \big\| < r'$, bestaat er een eenduidige oplossing $x = x_y \in \mathbb{R}^2$ van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \sin(x_1) + e^{-x_2} &= y_1 \\ e^{x_1} + \sin(x_2) &= y_2, \end{aligned}$$

zó, dat $\|x_y\| < r$. Verder is de afbeelding $y \mapsto x_y$ glad.

(ii) Bereken de afgeleide van de afbeelding $y \mapsto x_y$ in het punt $(1,1)$.

Opgave 4 (lijnintegraal, 14 pt)**.** Beschouw de verzameling

$$C := \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^6 - x + y^6 - y = 0 \big\}.$$

(i) Bewijs dat C compact is.

(ii) Laat zien dat C een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^2$ is. Bereken haar dimensie.

(iii) Bereken de raakruimte aan C in het punt $(0,0) \in C$.

(iv) Vind een eenheidsraakvectorveld T langs C.

(v) Bereken de lijn-integraal

$$\int_C X \cdot T \, ds,$$

van het vectorveld

$$X(x,y) := \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ \cos(y^3) \end{pmatrix}.$$

Hint: Gebruik een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 5 (maximum is een kritiek punt, 4pt)**.** Zij $M \subseteq \mathbb{R}^n$ een C^1-deelvariëteit, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ en $x_0 \in M$ een punt waarin f zijn maximum aanneemt. Laat zien dat x_0 een kritiek punt van f is.

Hint: Je mag een soortgelijke uitspraak voor een functie van één reële variabele gebruiken.

Z.O.Z.

Opgave 6 (Lagrange-multiplicator-methode, 5 pt)**.** Zij

$$n, p \in \mathbb{N}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ open}, \; F \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^p),$$
$$M := g^{-1}(0), \quad f := F|_M, \quad x_0 \in U,$$
$$L : U \times \mathrm{Lin}\big(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) := F(x) - \lambda(g(x)).$$

Stel dat g een submersie is en dat er een $\lambda \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ bestaat zó, dat (x_0, λ) een kritiek punt van L is. Laat zien dat x_0 een kritiek punt van f is.

Opgave 7 (twee-dimensionale integraal, 4pt)**.** Bereken

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \tan\big(\cos(x_1)x_2\big)\, dx_1 \right) dx_2.$$

Opmerking: Als je een stelling gebruikt, ga dan na dat aan de voorwaarden van deze stelling voldaan is.

Opgave 8 (integraal van functie, 13 pt)**.** (i) Teken een plaatje van de verzameling

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x, \; 1 \le \frac{y}{x} \le 2, \; 2\pi \le xy \le 4\pi \right\}.$$

(ii) We definiëren de functie

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \frac{y}{x} \sin(xy).$$

Laat zien dat f (eigenlijk) Riemann-integreerbaar is over S. Bereken de Riemann-integraal van f over S.

Hint: Gebruik een stelling uit het hoorcollege.

Opgave 9 (flux door oppervlak, 8 pt)**.** We definiëren

$$X : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4, \quad X(x) := x\|x\|^{-4}, \qquad M := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 1 \right\}.$$

De verzameling M is een glad hyperoppervlak. (Dit hoef je niet te bewijzen.) Zij ν een eenheids-normaalvectorveld op M zó, dat $\nu\big(1, 0, 0, 0\big) = \big(1, 0, 0, 0\big)$. Bereken de flux van X door M m.b.t. ν.