F. Ziltener

2022/ 2023, blok 4
10 juli, 2023

Analyse in meer variabelen, WISB212

Hertentamen

achternaam: ________________ voornaam: ________________

studentnummer: ________________________________

Het tentamen duurt 180 minuten.

Aanwijzingen:

- Zet je mobiele telefoon uit en leg hem in je tas.
- Leg je studentenkaart op tafel.
- Schrijf met een blauwe of zwarte pen, **niet** met een groene of rode pen, noch met een potlood.
- **Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.**
- **Lever ook dit voorblad in.**
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt oplossen, mag je dit onderdeel in het vervolg wel gebruiken.

25 punten zijn voldoende voor een cijfer 5.5.

Voor verdere aanwijzingen z.o.z.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
/4	/7	/10	/14	/4	/12	/4	/8	/63

Boeken, cursusmateriaal en rekenmachines mogen niet gebruikt worden, maar het is toegestaan om één vel papier (A4-formaat, voor- en achterkant) met eigen aantekeningen te gebruiken. Deze moeten handgeschreven zijn.

Tenzij anders aangegeven, mag je ieder resultaat (d.w.z. (hulp-)stelling, propositie of gevolg) uit het hoorcollege, de cursusboeken en het vak Analyse (in één variabele) gebruiken, zonder het opnieuw te bewijzen.

Als een tentamenopgave (deel van) een resultaat X in het hoorcollege of in het boek was dan wordt verwacht dat je de uitspraak herbewijst. Tenzij anders aangegeven, mag je elk resultaat gebruiken dat in het bewijs van X werd gebruikt, zonder het te bewijzen.

Tenzij anders aangegeven, mag je het volgende zonder bewijs gebruiken:

- Een bepaalde functie is differentieerbaar/ glad (als dit inderdaad het geval is), tenzij anders aangegeven.
- een formule voor de afgeleide van de impliciete functie die in de Impliciete Functiestelling optreedt
- een formule voor de naar buiten wijzende coöriëntatie op de rand van een C^1-domein
- Een bepaalde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is een glad domein (als dit inderdaad het geval is).
- wat de rand van een bepaald glad domein in $\mathbb{R}^n$ is

Bewijs elke andere uitspraak die je doet. Rechtvaardig je berekeningen. Ga na dat aan de voorwaarden van de stellingen die je gebruikt is voldaan.

Succes!

Voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ duiden we met x_i de i-de coördinaat van x aan.

Opgave 1 (differentieerbaarheid, 4 pt)**.** (i) Laat zien dat de volgende functie in het punt $(1,0)$ differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \left\| x - (1,0) \right\|^2, & \text{als } x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

(ii) We definiëren

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(y) := \begin{pmatrix} \cos(y_1 + y_2) \\ \sin(y_1^3 + y_2^3) \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat de functie $f \circ g$ in het punt 0 differentieerbaar is en bereken haar afgeleide in dit punt.

Opmerking: Je mag zonder bewijs gebruiken dat g differentieerbaar is.

Opgave 2 (niet lineaire vergelijking, 7 pt)**.** (i) Bewijs dat er reële getallen $a > 0$ en $b > 0$ met de volgende eigenschappen bestaan: Voor elke $x \in (1 - a, 1 + a)$ bestaat er een eenduidige oplossing $y = y_x \in \big(-b, b \big)$ van de vergelijking

$$\sin(\pi x + y) = y.$$

Verder is de afbeelding $x \mapsto y_x$ glad.

(ii) Bereken de afgeleide van deze afbeelding in het punt 1.

Opgave 3 (torus als deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$, raakruimte, 10 pt)**.** We definiëren

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 \right)^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

(i) Teken een plaatje van M en de coördinaatassen.

(ii) Geef de coördinaten van vier punten aan die op M en niet in hetzelfde vlak liggen.

(iii) Laat zien dat M een gladde deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$ is. Bereken haar dimensie.

(iv) Voor elke $x \in M$ bepaal de raakruimte $T_x M$.

Opgave 4 (maximum van functie, 14 pt)**.** We definiëren

$$M := \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^6 - x + y^6 - y = 0 \big\},$$
$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y.$$

(i) Laat zien dat de functie f haar maximum aanneemt.

(ii) Bereken het maximum van f.

Opmerking: Voor deel (ii) mag je elke opgave uit de opgavenbladden gebruiken.

Z.O.Z.

Opgave 5 (herhaalde integraal, 4 pt)**.** Bereken

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}\left(e^{y\sin x}-e^{-y\sin x}\right)\,dx\right)dy.$$

Opgave 6 (twee-dimensionale integraal, 12 pt)**.** (i) Teken een plaatje van de verzameling

$$S := \big\{x \in [0,\infty)\times[0,\infty) \,\big|\, x_1 \geq x_2,\ 1 \leq \|x\| \leq 2\big\}.$$

(ii) We definiëren de functie

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x\|.$$

Bereken de integraal

$$\int_S f(x)\,dx.$$

Opmerkingen : Als je een coördinatentransformatie gebruikt dan wordt je gevraagd om de bijhorende berekeningen te laten zien.

Je mag gebruiken dat f Riemann-integreerbaar is over S.

Opgave 7 (integraal over bal, 4 pt)**.** We definiëren

$$f : \overline{B}_1^3(0) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := D_1\big(-x_2e^{x_1x_2x_3}\big) + D_2\big(x_1e^{x_1x_2x_3}\big).$$

Bereken de Riemann-integraal van f.

Opmerking: Je hoeft niet te bewijzen dat f Riemann-integreerbaar is.

Opgave 8 (divergentie van een vectorveld en flux, 8 pt)**.** Voor welke $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ is de volgende uitspraak waar? We definiëren $\nu : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ door $\nu(x) := x$. Zij X een C^1-vectorveld op $\overline{B}_1^n(0) \setminus \{0\}$ zó, dat $\nabla \cdot X$ Riemannintegreerbaar is. Dan geldt dat

$$\int_{\overline{B}_1^n(0)\setminus\{0\}} \nabla \cdot X\,dx = \int_{S^{n-1}} X \cdot \nu\,dA.$$