Functies en Reeksen, 30 januari 2023, 17:00 – 20:00 (20:30)

• Schrijf op elk vel je **naam**. Vermeld bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
• Laat in het algemeen bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
• Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
• **Er zijn 4 opgaven.** In totaal zijn er 40 punten te behalen. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten gedeeld door 4, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.
• Je mag géén gebruik maken van het dictaat of van aantekeningen.

Succes!

1. (**10 pt**) We beschouwen de functies $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{xk^2 + x^2k}{x^2 + k^4}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) (**4 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op ieder interval $[-R, R]$, met $R > 0$.

   (b) (**3 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

   (c) (**3 pt**) Toon aan dat door

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   een continue functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

2. (**10 pt**) De functies $\cos$ en $\sin$ zijn analytisch op $\mathbb{C}$ en worden gegeven door de bekende machtreeksen. Er geldt $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, dus ook, bijvoorbeeld,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

   (a) (**3 pt**) Bewijs dat de nulpunten van $\sin z$ allemaal reëel zijn. (Hint: gebruik de formule voor de absolute waarde van e^w voor $w \in \mathbb{C}$.)

   (b) (**3 pt**) Bewijs dat de complexe functie f gegeven door

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

   een ophefbare singulariteit heeft in 0. De Laurent-reeks voor f rond 0 is dus een machtreeks. Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

   (c) (**4 pt**) Bewijs dat de complexe functie g gegeven door

$$g(z) = \frac{z}{\sin z}, \qquad (z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z| < 1)$$

   een ophefbare singulariteit heeft in 0. De Laurent-reeks voor g rond 0 is dus een machtreeks. Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

3. (**10 pt**) We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z^4+4}.$$

Je mag in deze opgave het gemakkelijk te bewijzen feit gebruiken dat f vier polen van eerste orde heeft, namelijk $\pm 1 \pm i$.

   (a) (**3 pt**) Toon aan dat in elk singulier punt α van f geldt dat

   $$\mathrm{Res}_\alpha f = \frac{1}{4\alpha} + \frac{2}{4\alpha^3}.$$

   Hint: schrijf $p(z) = z^4 + 4$ en toon eerst aan dat

   $$\lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}.$$

   (b) (**3 pt**) Voor $R > 2$ definiëren we $\tau_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{it}$. Toon aan dat

   $$\lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R} f(z)dz = 0.$$

   (c) (**4 pt**) Bereken de integraal

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$$

   door gebruik te maken van (a), (b) en de residuenstelling.

4. (**10 pt**) We beschouwen de 2π-periodieke functie $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi[$ gedefinieerd is door $\phi(x) = |x|$.

   (a) (**4 pt**) Bepaal de Fourier-coëfficiënt $c_0 = (\mathcal{F}\phi)_0$. Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = (\mathcal{F}\phi)_k$ voor $k \neq 0$ gegeven worden door

   $$c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \qquad (k \neq 0).$$

   (b) (**2 pt**) Bewijs met behulp hiervan dat

   $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

   (c) (**1 pt**) Beargumenteer dat de reeks

   $$\sum_{j\geq 1} \frac{\cos((2j-1)x)}{(2j-1)^2}$$

   absoluut uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

   (d) (**3 pt**) Geef een eenvoudige expliciete beschrijving van de somfunctie g van de net genoemde reeks.

Uitwerking Opgave 1

(a) Voor $k \geq 1$ en $x \in [-R, R]$ geldt:

$$|f_k(x)| \leq \frac{|x|k^2 + |x|^2 k}{x^2 + k^4} \leq \frac{Rk^2 + R^2 k}{k^4} \leq \frac{Rk^2 + R^2 k^2}{k^4} = (R^2 + R)\frac{1}{k^2} \, .$$

Schrijf $C = R^2 + R$. Dan volgt dat voor alle $k \geq 1$ geldt:

$$||f_k||_{[-R,R]} \leq Ck^{-2}.$$

De reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$ is convergent. Met het uniforme majorantie-kenmerk concluderen we dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op $[-R, R]$.

(b) We merken op dat

$$f_k(k^2) = \frac{k^4 + k^5}{k^4 + k^4} \geq \frac{k^5}{2k^4} = \frac{k}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat $||f_k||_{\mathbb{R}} \geq \frac{1}{2}$ voor elke $k \geq 1$. Uit de uniforme convergentie van de reeks op $\mathbb{R}$ zou volgen dat $||f_k||_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $k \to \infty$. Dus de reeks convergeert niet uniform op $\mathbb{R}$.

(c) Zij $b \in \mathbb{R}$. Dan bestaat er een $R > 0$ zo dat $b \in]-R, R[$. Uit (a) volgt dat de reeks uniform convergent is op $[-R, R]$. Hieruit volgt dat de functie $F|_{[-R,R]}$ continu is. Dus F is continu in b. Aangezien dit voor elke $b \in \mathbb{R}$ geldt, concluderen we dat F continu is op $\mathbb{R}$.

Uitwerking Opgave 2

(a) Er geldt

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \, , \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Dus als $\sin z = 0$, dan $e^{iz} - e^{-iz} = 0$, ofwel $e^{iz} = e^{-iz}$, dus $|e^{iz}| = |e^{-iz}|$. Als $w = a + bi$ met a en b in $\mathbb{R}$, dan $|e^w| = e^a$. Voor $z = x + iy$ met x en y in $\mathbb{R}$ hebben we $iz = -y + ix$ en $-iz = y - ix$. Dus uit $\sin z = 0$ volgt $e^{-y} = e^y$, dus $-y = y$ (want $-y$ en y zijn reëel), dus $y = 0$, dus $z \in \mathbb{R}$. (De reële nulpunten van sin kennen we natuurlijk: dit zijn precies de getallen van de vorm $k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.)

(b) Zoals aangegeven is $f(z)$ gedefinieerd voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Omdat teller en noemer holomorf zijn op $\mathbb{C}$ en omdat de noemer ongelijk is aan 0 op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, is f holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dus de enige singulariteit van f ligt in 0. Het is ook duidelijk dat f in 0 een simpele pool òf een ophefbare singulariteit heeft. Voor de Laurent-reeks van f rond 0 geldt dus in elk geval dat $c_k = 0$ voor $k < -1$. Ook geldt $\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \sin z = 0$, dus ook $c_{-1} = 0$. We concluderen dat f een ophefbare singulariteit heeft in 0. Uit de bekende machtreeks voor sin leiden we direct de machtreeks voor f rond 0 af:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \, .$$

De convergentiestraal van deze machtreeks is ∞. Dit volgt met behulp van Stelling 2.18 (vrijwel net zoals voor de machtreeks voor e^z). Het volgt ook uit Opmerking 3.41.

(c) Voor de uitbreiding f_1 van f tot $\mathbb{C}$ geldt $f_1(0) = 1$. Dus ook g kan uitgebreid worden tot g_1, gedefinieerd in elk geval voor alle z met $|z| < 1$, en $g_1(0) = f_1(0)^{-1} = 1$. Dit laat al zien dat g een ophefbare singulariteit heeft in 0. Alternatief zien we aan de machtreeks voor sin dat sin een simpel nulpunt heeft in 0, dus g heeft ten hoogste een simpele pool in 0, maar $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$, dus $\lim_{z\to 0} zg(z) = 0$, dus g heeft een ophefbare singulariteit in 0. De convergentiestraal van de machtreeks voor g rond 0 is gelijk aan π, de afstand van de oorsprong tot de dichtstbijzijnde nulpunten π en $-\pi$ van de noemer van g (die geen nulpunten van de teller zijn). Dit volgt als in Opmerking 3.41 en Voorbeeld 3.42.

Uitwerking Opgave 3

(a) De functie p is overal op $\mathbb{C}$ complex differentieerbaar en voor alle $\beta \in \mathbb{C}$ geldt

$$\lim_{z\to\beta} \frac{p(z)-p(\beta)}{z-\beta} = p'(\beta) = 4\beta^3.$$

Als α een singulier punt van f is, dan zeker $p(\alpha) = 0$, dus $\alpha \neq 0$. Uit de rekenregels voor limieten volgt dan

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}\,.$$

Dus

$$\mathrm{Res}_\alpha f = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)(z^2+2)}{p(z)} = \frac{\alpha^2+2}{4\alpha^3} = \frac{1}{4\alpha} + \frac{2}{4\alpha^3}\,.$$

(b) Voor $R > 2$ en $z \in \tau_R([0,\pi])$ geldt dat $f(z)$ gedefinieerd is en dat $|z| = R$, dus

$$|f(z)| = \frac{|z^2+2|}{|z^4+4|} \le \frac{R^2+2}{R^4-4}$$

(want $|z^4+4| \ge R^4 - 4$ m.b.v. de omgekeerde driehoeksongelijkheid), dus $||f||_{\tau_R([0,\pi])} \le (R^2 + 2)/(R^4-4)$. Dan

$$\left|\int_{\tau_R} f(z)dz\right| \le L(\tau_R)||f||_{\tau_R} \le \pi R\frac{R^2+2}{R^4-4}.$$

De limiet hiervan als $R \to \infty$ is gelijk aan 0, zodat ook de limiet van de integraal over τ_R gelijk is aan 0, zoals gevraagd.

(c) Definieer $I_R\colon [-R,R] \to \mathbb{C}$ door $I_R(t) = t$. Door herparametriseren en plakken verkrijgen we een continue gesloten kromme γ_R die stuksgewijs C^1 is, door eerst I_R te doorlopen en vervolgens τ_R. Volgens de residuenstelling is dan $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ gelijk aan $2\pi i$ keer de som van de residuen van f bij de singulariteiten van f gelegen binnen γ_R (voor $R > 2$). Dit zijn de punten $1+i$ en $-1+i$. Volgens (a) is de som van de residuen gelijk aan

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{2}{(-1+i)^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{2} + \frac{-1-i}{2} + \frac{2(1+i)}{-4} + \frac{2(-1+i)}{-4}\right)$$

(want $\alpha^4 = -4$), dus aan

$$\frac{1}{4}(-i-i) = \frac{-i}{2}\,.$$

De integraal over γ_R is dus gelijk aan π. De integraal is ook gelijk aan de integraal over I_R plus die over τ_R. Omdat volgens (b) de integraal over τ_R naar 0 gaat als $R \to \infty$, geldt dat $\lim_{R\to\infty}\int_{I_R} f(z)dz = \pi$. Links staat de gevraagde integraal.

Uitwerking Opgave 4

(a) In Voorbeeld 4.21 staat al dat $c_0 = \pi/2$. De formule voor c_k met $k \neq 0$ wordt ook gegeven; alleen de partiële integratie staat niet uitgeschreven:

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{0} \frac{x}{ik}\frac{d}{dx}e^{-ikx}dx - \int_0^\pi \frac{x}{ik}\frac{d}{dx}e^{-ikx}dx = \left(\frac{x}{ik}e^{-ikx}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{ik}e^{-ikx}dx - \left(\frac{x}{ik}e^{-ikx}\right)\Big|_0^\pi$$
$$+ \int_0^\pi \frac{1}{ik}e^{-ikx}dx = (-1)^k\frac{\pi}{ik} - \left(\frac{1}{k^2}e^{-ikx}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - (-1)^k\frac{\pi}{ik} + \left(\frac{1}{k^2}e^{-ikx}\right)\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{1}{k^2}(-1 + (-1)^k + (-1)^k - 1) = \frac{2}{k^2}((-1)^k - 1),$$

wat direct tot de gevraagde formule leidt.

(b) Het is eenvoudig in te zien dat $\phi \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We kunnen dus de identiteit van Parseval toepassen (Stelling 5.21). Links komt $1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 1/(2\pi)\cdot 2\pi^3/3 = \pi^2/3$. Rechts: de Fourier-coëfficiënten c_k met k even en $k \neq 0$ zijn 0. De som van de overige gekwadrateerde Fouriercoëfficiënten is gelijk aan $\pi^2/4+2\sum_{j=1}^{\infty}(1/\pi^2)(4/(2j-1)^4) = \pi^2/4+(8/\pi^2)\sum_{j=1}^{\infty}(1/(2j-1)^4)$, dus de gevraagde som is gelijk aan $(\pi^2/8)(\pi^2/3 - \pi^2/4) = \pi^4/96$, zoals bewezen moest worden.

(c) Dit is bijzonder duidelijk, want $||\cos||_{\mathbb{R}} = 1$ en de reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$ is convergent, dus $\sum_{j\geq 1}(2j-1)^{-2}$ is ook convergent.

(d) De reden dat we de reeks bij (c) bekijken is dat hij ontstaat uit de rij $s(\phi)_l$ van symmetrische partiële Fourier-sommen. Omdat ϕ continu is op $\mathbb{R}$, weten we dat deze rij op $\mathbb{R}$ uniform naar ϕ convergeert (zie Opmerking 4.58). Precies: voor $k \neq 0$ geldt $c_k = 0$ als k even is en $c_k = c_{-k} = -2/(\pi k^2)$ als k oneven is. Dus $s(\phi)_{2l-1} = (\pi/2) - 4\sum_{j=1}^{l} \frac{\cos((2j-1)x)}{\pi(2j-1)^2}$ en dit convergeert voor $l \to \infty$ naar $|x|$, mits $|x| \leq \pi$. De conclusie is dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos((2j-1)x)}{(2j-1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x|$$

mits $|x| \leq \pi$. Links staat een 2π-periodieke functie.