Functies en Reeksen, 30 januari 2023, 17:00 – 20:00 (20:30)

• Schrijf op elk vel je **naam**. Vermeld bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
• Laat in het algemeen bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
• Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
• **Er zijn 4 opgaven.** In totaal zijn er 40 punten te behalen. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten gedeeld door 4, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.
• Je mag géén gebruik maken van het dictaat of van aantekeningen.

Succes!

1. (**10 pt**) We beschouwen de functies $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{xk^2 + x^2k}{x^2 + k^4}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) (**4 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op ieder interval $[-R, R]$, met $R > 0$.

   (b) (**3 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

   (c) (**3 pt**) Toon aan dat door

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   een continue functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

2. (**10 pt**) De functies $\cos$ en $\sin$ zijn analytisch op $\mathbb{C}$ en worden gegeven door de bekende machtreeksen. Er geldt $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, dus ook, bijvoorbeeld,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

   (a) (**3 pt**) Bewijs dat de nulpunten van $\sin z$ allemaal reëel zijn. (Hint: gebruik de formule voor de absolute waarde van e^w voor $w \in \mathbb{C}$.)

   (b) (**3 pt**) Bewijs dat de complexe functie f gegeven door

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

   een ophefbare singulariteit heeft in 0. De Laurent-reeks voor f rond 0 is dus een machtreeks. Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

   (c) (**4 pt**) Bewijs dat de complexe functie g gegeven door

$$g(z) = \frac{z}{\sin z}, \qquad (z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z| < 1)$$

   een ophefbare singulariteit heeft in 0. De Laurent-reeks voor g rond 0 is dus een machtreeks. Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

Z.O.Z.

3. (**10 pt**) We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z^4+4}.$$

Je mag in deze opgave het gemakkelijk te bewijzen feit gebruiken dat f vier polen van eerste orde heeft, namelijk $\pm 1 \pm i$.

   (a) (**3 pt**) Toon aan dat in elk singulier punt α van f geldt dat

   $$\operatorname{Res}_\alpha f = \frac{1}{4\alpha} + \frac{2}{4\alpha^3}.$$

   Hint: schrijf $p(z) = z^4 + 4$ en toon eerst aan dat

   $$\lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}.$$

   (b) (**3 pt**) Voor $R > 2$ definiëren we $\tau_R \colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{it}$. Toon aan dat

   $$\lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R} f(z)dz = 0.$$

   (c) (**4 pt**) Bereken de integraal

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$$

   door gebruik te maken van (a), (b) en de residuenstelling.

4. (**10 pt**) We beschouwen de 2π-periodieke functie $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi[$ gedefinieerd is door $\phi(x) = |x|$.

   (a) (**4 pt**) Bepaal de Fourier-coëfficiënt $c_0 = (\mathcal{F}\phi)_0$. Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = (\mathcal{F}\phi)_k$ voor $k \neq 0$ gegeven worden door

   $$c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \qquad (k \neq 0).$$

   (b) (**2 pt**) Bewijs met behulp hiervan dat

   $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

   (c) (**1 pt**) Beargumenteer dat de reeks

   $$\sum_{j\geq 1} \frac{\cos((2j-1)x)}{(2j-1)^2}$$

   absoluut uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

   (d) (**3 pt**) Geef een eenvoudige expliciete beschrijving van de somfunctie g van de net genoemde reeks.