Functies en Reeksen, 13 maart 2023, 17:00 – 20:00 (20:30)

• Schrijf op elk vel je **naam**. Vermeld bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
• Laat in het algemeen bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!
• Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
• **Er zijn 4 opgaven.** In totaal zijn er 40 punten te behalen. Het tentamencijfer wordt bepaald door het totaal aantal punten gedeeld door 4, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.
• Je mag géén gebruik maken van het dictaat of van aantekeningen. Je mag ook geen gebruik maken van een rekenmachine.

Succes!

1. (**10 pt**) We beschouwen de functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 1$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{2x^4 + 4k^2}{x^2 + k^4}\,, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   (a) (**4 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ absoluut uniform convergeert op ieder interval $[-R, R]$, met $R > 0$.

   (b) (**3 pt**) Toon aan dat de reeks $\sum_{k\geq 1} f_k$ niet uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

   (c) (**3 pt**) Toon aan dat door

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   een continue functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

2. (**10 pt**) Gegeven zijn positieve reële getallen a, b en c. Van een holomorfe functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven dat

$$|f(z)| \leq a + b|z| + c|z|^2, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

   (a) (**4 pt**) Bewijs dat er unieke A, B en $C \in \mathbb{C}$ bestaan zo dat

$$f(z) = A + Bz + Cz^2, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

   Hint: gebruik integraalformules voor $f^{(k)}(0)$ (voor $k \in \mathbb{N}$).

   (b) (**3 pt**) Bewijs dat $|A| \leq a$. Bewijs ook dat $|C| \leq c$.

   (c) (**3 pt**) Bewijs dat $|B| \leq b + 2\sqrt{ac}$.

Z.O.Z.

3. (**10 pt**) We beschouwen de complexe functie f gegeven door de formule

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}.$$

(a) (**3 pt**) Toon aan dat de functie f precies één singulier punt α in $\mathbb{C}$ heeft met $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$. Toon aan dat f in dit punt een pool van de **tweede** orde heeft.

(b) (**3 pt**) Bewijs dat

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) = -\frac{1}{2} i e^{-1}.$$

Hint: beschouw de functie g gegeven door de formule

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}.$$

Bepaal $g'(z)$ en bereken $g'(i)$. Gebruik dit om het gevraagde residu te bepalen.

(c) (**2 pt**) Voor $R > 1$ definiëren we $\tau_R \colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ door $\tau_R(t) = Re^{it}$. Toon aan dat

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\tau_R} f(z)dz = 0.$$

(d) (**2 pt**) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}\, dx$$

door gebruik te maken van (a), (b), (c) en de residuenstelling.

4. (**10 pt**) In deze opgave is a een niet geheel reëel getal, dus $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. We beschouwen eerst de 2π-periodieke functie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi,\pi]$ gedefinieerd is door $f(x) = e^{iax}$.

(a) (**3 pt**) Toon aan dat de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ voor $k \in \mathbb{Z}$ gegeven worden door

$$c_k = \frac{(-1)^k \sin(\pi a)}{\pi(a-k)}.$$

(b) (**2 pt**) Vervolgens beschouwen we de 2π-periodieke functie $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi,\pi]$ gedefinieerd is door $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$. Bewijs met behulp van (a) dat de Fourier-coëfficiënten $d_k = \mathcal{F}(g)_k$ voor $k \in \mathbb{Z}$ gegeven worden door

$$d_k = \frac{(-1)^k(-k)}{i\pi(k^2 - \frac{1}{4})}.$$

(c) (**3 pt**) Bewijs dat

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2}{(k^2-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

(d) (**2 pt**) Noteer de $n$de symmetrische partiële Fourier-som van g met $s(g)_n(x) := \sum_{|k|\le n} d_k e^{ikx}$. Beargumenteer dat de rij $s(g)_n(\pi)$ convergeert voor $n \to \infty$, en bepaal de limiet.