Kansrekening (WISB 161)
Tentamen

Sjoerd Dirksen

29 juni 2023, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van de tabellen aan het einde van het tentamen.

Vraag 1 [9 punten]

Zij X exponentieel verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Zij $Y = \lceil X \rceil$, waarbij, voor een gegeven $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ het gehele getal is dat we krijgen door x naar boven af te ronden, d.w.z.,

$$\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \ : \ x \leq y\}.$$

(a) Laat zien dat Y een geometrische verdeling heeft met parameter $1 - e^{-\lambda}$.

(b) Gebruik deel (a) om een methode te beschrijven om een geometrisch verdeelde kansvariabele met een voorgegeven parameter $0 < p \leq 1$ te simuleren.

Hint: Je mag aannemen dat je een exponentieel verdeelde kansvariabele kunt simuleren.

Vraag 2 [15 punten]

Koning Karel III is op staatsbezoek in Nederland. Hij is door de rector magnificus van de UU uitgenodigd om een inspirerende toespraak te houden voor de deelnemers van het vak *Kansrekening.* Koning Karel III heeft er helemaal geen zin in en laat zich daarom vervangen door zijn zelfgemaakte chatbot, die hij 'Sir Chat-a-Lot' heeft gedoopt.

Sir Chat-a-Lot genereert tekst door herhaaldelijk een woord uit de collectie

$$\{\text{is}, \text{en}, \text{horror}, \text{mega}, \text{kansrekening}\}$$

volgens een discrete uniforme verdeling te kiezen. Er zijn twee uitzonderingen: als het laatst gegenereerde woord 'is' of 'en' is, dan wordt als volgende woord een woord uit de collectie

$$\{\text{horror}, \text{mega}, \text{kansrekening}\}$$

gekozen volgens een discrete uniforme verdeling. Koning Karel III zet Sir Chat-a-Lot aan. We gaan ervan uit dat Sir Chat-a-Lot eindeloos doorkletst, d.w.z., eindeloos nieuwe woorden genereert.

(a) Wat is de kans dat Sir Chat-a-Lot als eerste vijf woorden

kansrekening is mega en horror

genereert?

(b) Wat is de kans dat Sir Chat-a-Lot de eindeloos doorlopende zin

kansrekening is horror horror horror horror horror horror horror ...

genereert?

(c) Zij p_i de kans dat woord i gelijk is aan 'is' of gelijk is aan 'en'. Laat zien dat

$$5p_i = 2(1 - p_{i-1})$$

voor alle $i \geq 2$.

(d) Laat met behulp van deel (c) zien dat het verwachte aantal keer dat de woorden 'is' en 'en' in de eerste n gegenereerde woorden voorkomen gelijk is aan

$$\frac{2(n + p_n)}{7}.$$

Vraag 3 [10 punten]

We zeggen dat een rij kansvectoren $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ *in kans convergeert* naar een kansvector Y in $\mathbb{R}^d$ (notatie: $Y^{(n)} \xrightarrow{P} Y$) als voor elke $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\|Y^{(n)} - Y\|_2 \geq \varepsilon) = 0.$$

(a) Bewijs dat $Y^{(n)} \xrightarrow{P} Y$ dan en slechts dan als

$$Y_i^{(n)} \xrightarrow{P} Y_i, \qquad \text{voor alle } 1 \leq i \leq d. \tag{1}$$

Hint: gebruik de ongelijkheden

$$\max_{1\leq i\leq d} |x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \max_{1\leq i\leq d} |x_i|, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Zij $(X^{(j)})_{j\geq 1}$ een rij onafhankelijke en identiek verdeeld kansvectoren in $\mathbb{R}^d$ met verwachtingswaarde $\mu \in \mathbb{R}^d$ en covariantiematrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ en zij $\bar{X}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X^{(j)}$. Gebruik deel (a) om te laten zien dat $\bar{X}^{(n)} \xrightarrow{P} \mu$ voor $n \to \infty$.

Hint: Je mag gebruiken dat transformaties van onafhankelijke kansvectoren weer onafhankelijk zijn.

Vraag 4 [11 punten]

Zij, voor $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim Bin(n, p_n)$ en neem aan dat

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda.$$

Zij $X \sim Pois(\lambda)$. Zij M_{X_n} en M_X de moment genererende functies van X_n en X. Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t)$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$. Gebruik deze uitspraak om de limietstelling van Poisson te bewijzen.

Hint: Je mag gebruiken dat

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	**Kansfunctie**	**Verwachtingswaarde**	**Variantie**
$\mathrm{Ber}(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$	p	$p(1-p)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ \ k=0,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geom}(p)$	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ \ k\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	**Kansdichtheid**	**Verwachtingswaarde**	**Variantie**
$\mathrm{Unif}(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{als } a<x<b\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{als } x>0\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$	μ	σ^2