Kansrekening (WISB 161)
Hertentamen

Sjoerd Dirksen

13 juli 2023, 13:30-16:30

Dit tentamen bestaat uit 5 vragen, die in totaal 45 punten waard zijn. Als het je niet lukt om een onderdeel van een vraag te beantwoorden, dan is het nog steeds mogelijk om de daarop volgende onderdelen te beantwoorden. Schrijf op elk ingeleverd blad jouw naam en studentnummer en nummer de pagina's. Voorzie elk antwoord van een zorgvuldige motivatie. Vereenvoudig jouw antwoorden voor zover mogelijk. Je mag gebruik maken van de tabellen aan het einde van het tentamen.

Vraag 1 [6 punten]

Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte en $A, B \in \mathcal{F}$. Zij $X = 1_A$ en $Y = 1_B$. Joep beweert dat X en Y niet gecorreleerd zijn dan en slechts dan als A en B onafhankelijk zijn. Heeft hij gelijk?

Vraag 2 [8 punten]

Sandra heeft een broer met de erfelijke ziekte hemofilie, maar een vader en een moeder die allebei de ziekte niet hebben. Aangezien hemofilie veroorzaakt wordt door een recessief allel op het X-chromosoom kunnen we concluderen dat haar moeder een *drager* moet zijn (d.w.z., op het ene X-chromosoom heeft zij het allel voor hemofilie en op het andere X-chromosoom een gezond allel) en dat haar vader het gezonde allel op zijn (enige) X-chromosoom heeft. Aangezien Sandra één X-chromosoom van haar vader heeft geërft en één van haar moeder, is er een 50% kans dat zij een drager van de ziekte is. Als zij een drager is, dan is er een 50% kans dat, als zij een zoon krijgt, dat deze de ziekte heeft. Sandra heeft twee zoons die beide geen hemofilie hebben. Wat is de kans dat Sandra een drager is?

Vraag 3 [9 punten]

Zij Y_n Poisson verdeeld met parameter n. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq n) = \frac{1}{2}$ en leidt af dat

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!} = \frac{1}{2}.$$

Hint: als $U \sim \text{Pois}(\lambda)$ en $V \sim \text{Pois}(\mu)$ onafhankelijk zijn, dan geldt $U + V \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$. Je mag deze uitspraak (bekend uit de opgaven) zonder bewijs gebruiken.

Vraag 4 [8 punten]

Zij

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zij (X_1, X_2) een continue kansvector die uniform verdeeld is in A. Bereken de kansdichtheid van X_1 en laat zien dat X_1 verwachtingswaarde 0 heeft.

Hint: teken eerst een plaatje van A.

Vraag 5 [14 punten]

Ondernemer Elon heeft uit verveling het sociale media platform *Vogeltje* gekocht. Sinds de overname ontwikkelt de beurskoers van het platform zich grillig. Elke dag verstuurt Elon één *Twiet* op zijn platform. Hierin staat ofwel een briljant idee, waardoor de beurskoers die dag met 40% stijgt, ofwel een bizar bericht (bijvoorbeeld een aankondiging dat hij het *Vogeltje* gaat bevrijden door al zijn medewerkers te ontslaan), waardoor de beurskoers met 20% daalt. De kans op een briljant idee of een bizar bericht is even groot en we gaan ervan uit dat de inhoud van *Twiets* op verschillende dagen onafhankelijk zijn. Elon begint met *Twiets* versturen op de dag na de overname.

(a) Een beleggingsfonds heeft op de beurs voor 1 miljoen dollar aandelen gekocht op de dag van de overname (dag 0). Laat zien dat voor iedere $n \geq 1$ de waarde van de aandelen in miljoenen dollars aan het eind van dag n gelijk is aan

$$W_n = \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

waarbij de X_i onafhankelijke kansvariabelen zijn met kansfunctie

$$p_{X_i}(\tfrac{14}{10}) = \frac{1}{2} = p_{X_i}(\tfrac{8}{10}).$$

(b) Bereken de verwachte waarde van de aandelen aan het eind van dag n.

(c) Laat zien dat

$$W_n^{1/n} \xrightarrow{P} \frac{\sqrt{112}}{10}$$

voor $n \to \infty$.

Hint: Uit de opgaven kennen we de volgende rekenregel: als $a \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is in a en $Y_n \xrightarrow{P} a$, dan geldt $g(Y_n) \xrightarrow{P} g(a)$. Deze uitspraak mag zonder bewijs gebruikt worden.

Een aantal belangrijke kansverdelingen

Discrete kansverdelingen

Naam	Kansfunctie	Verwachtingswaarde	Variantie
Ber(p)	$\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$	p	$p(1-p)$
Bin(n,p)	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k = 0, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \ \ k \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pois(λ)	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	λ	λ

Continue verdelingen

Naam	Kansdichtheid	Verwachtingswaarde	Variantie
Unif(a,b)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } a < x < b \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
N(μ, σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$	μ	σ^2