Uitwerkingen voor Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 12 april 2023 13:30–16:30

1. Ja, (X, d) is een metrische ruimte omdat het voldoet aan de volgende eigenschappen.

   - $d(a, b) = 0 \iff a = b$
     Gegeven.
   - $d(a, b) = d(b, a)$
     Bewijs: Als we $x = a$, $y = b$, en $z = b$ invullen in de gegeven ongelijkheid krijgen we
     $$d(a, b) \leq d(b, a) + d(b, b) = d(b, a).$$
     Als we $x = b$, $y = a$, en $z = a$ invullen in de gegeven ongelijkheid krijgen we
     $$d(b, a) \leq d(a, b) + d(a, a) = d(a, b).$$
     Dus $d(a, b) \leq d(b, a)$ en $d(a, b) \geq d(b, a)$, waaruit volgt dat $d(a, b) = d(b, a)$.
   - $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$
     Bewijs: Dit volgt door $d(a, b) = d(b, a)$ toe te passen op de term $d(z, x)$ in de gegeven ongelijkheid:
     $$d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) = d(x, z) + d(z, y).$$
   - $d(a, b) \geq 0$
     Bewijs: Als we $x = b$, $y = b$, en $z = a$ invullen in de gegeven ongelijkheid krijgen we
     $$d(b, b) \leq d(a, b) + d(a, b) = 2d(a, b).$$
     Verder is $d(b, b) = 0$, dus $2d(a, b) \geq 0$, ofwel $d(a, b) \geq 0$.

2. Elke spiegeling is zijn eigen inverse. De inverse van $\mathrm{Sp}_n \circ \mathrm{Sp}_m$ is dus $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n$. Daardoor is $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n = \mathrm{Sp}_n \circ \mathrm{Sp}_m$ equivalent aan $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n \circ \mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n = I$ (waar I de identiteitstransformatie is), of met andere woorden $(\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n)^2 = I$. Verden weten we dat de samenstelling van twee indirecte isometrieën (zoals twee spiegelingen) een directe isometrie is. Volgens de classificatiestelling van isometrieën van $\mathbb{E}^2$ is een directe isometrie een translatie, rotatie, of de identiteit. In onze geval kan $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n$ geen niet-triviale translatie zijn, want $(\mathrm{Tr}_{\mathbf{v}})^2 \neq I$ als $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Verder kan $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n$ niet de identiteit zijn want dan zou $\mathrm{Sp}_m = \mathrm{Sp}_n$ zijn, in tegenspraak met de voorwaarde dat ze twee verschillende spiegelingen waren. Dus moet $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n$ een niet-triviale rotatie $\mathrm{Rot}_{P,\varphi}$ zijn. Het feit dat $(\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n)^2 = I$ betekent dan dat $(\mathrm{Rot}_{P,\varphi})^2 = \mathrm{Rot}_{P,2\varphi} = I = \mathrm{Rot}_{P,0}$, dat wil zeggen dat de rotatiehoek π is.

3. De afstandsfunctie in S^2 kan uitgedrukt worden als $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$. De voorwaarde $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ is dus equivalent aan $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. De verzameling m bestaat dus uit alle punten $\mathbf{c} = (x, y, z) \in S^2$ waarvoor $a_1x + a_2y + a_3z = b_1x + b_2y + b_3z$, ofwel $(a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)y + (a_3 - b_3)z = 0$. Dit is de vergelijking van een vlak door de oorsprong, dus m is een grootcirkel.

   De grootcirkel tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ correspondeert met het vlak door $(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. De vergelijking voor deze vlak is $(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0$

(normaalvector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$). De twee grootcirkels staan loodrecht op elkaar want het inproduct van de normaalvectoren van de vlakken is nul:

$$(a_1-b_1)(a_2b_3-a_3b_2)+(a_2-b_2)(a_3b_1-a_1b_3)+(a_3-b_3)(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

(of met andere woorden $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$).

(Alternatief bewijs voor het tweede deel: Laat $\mathbf{m}_1$ het middelpunt van de boog tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ zijn. Merk op dat $\mathbf{m}_1\in m$. Laat $\mathbf{m}_2$ een ander punt van m zijn waarvoor $d(\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2)<\pi/2$. Dan hebben $\triangle\mathbf{am}_1\mathbf{m}_2$ en $\triangle\mathbf{bm}_1\mathbf{m}_2$ per constructie ZZZ gelijk. Volgens de cosinusregel zijn daardoor de hoeken $\angle\mathbf{am}_1\mathbf{m}_2$ en $\angle\mathbf{bm}_1\mathbf{m}_2$ gelijk. Verder is $\angle\mathbf{am}_1\mathbf{m}_2+\angle\mathbf{bm}_1\mathbf{m}_2=\pi$ omdat $\mathbf{m}_1$ collineair is met $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Dus is $\angle\mathbf{am}_1\mathbf{m}_2=\angle\mathbf{bm}_1\mathbf{m}_2=\pi/2$.)

4. Ja. Laat

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\\\sqrt{1-(2-\sqrt{2})^2}\end{pmatrix}.$$

Deze punten liggen op H^2 want

$$\mathbf{a}\cdot_L\mathbf{a}=-1,\qquad \mathbf{b}\cdot_L\mathbf{b}=-2+1=-1,\qquad \mathbf{c}\cdot_L\mathbf{c}=-2+(2+\sqrt{2})^2+1-(2-\sqrt{2})^2=-1.$$

De driehoek $\triangle\mathbf{abc}$ is gelijkzijdig want

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=\operatorname{arccosh}(-\mathbf{a}\cdot_L\mathbf{b})=\operatorname{arccosh}(-(-\sqrt{2}))=\operatorname{arccosh}(\sqrt{2}),$$
$$d(\mathbf{a},\mathbf{c})=\operatorname{arccosh}(-\mathbf{a}\cdot_L\mathbf{c})=\operatorname{arccosh}(-(-\sqrt{2}))=\operatorname{arccosh}(\sqrt{2}),$$
$$d(\mathbf{b},\mathbf{c})=\operatorname{arccosh}(-\mathbf{a}\cdot_L\mathbf{b})=\operatorname{arccosh}(-(-2+2-\sqrt{2}))=\operatorname{arccosh}(\sqrt{2}).$$

5. (a) Merk op dat $A\in E$ en $B\in E$. Omdat E een affiene deelruimte is, ligt dus de affien-lineaire combinatie $C=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ ook in E. Dus C is een element van of $E\cap F$ of $E\setminus F$, omdat de vereniging van deze verzamelingen E is. Stel dat $C\in E\cap F$. Dan ligt zowel C als B in F. Omdat F een affiene deelruimte is, ligt dus ook affien-lineaire combinaties van C en B in F. Maar A is een affien-lineaire combinatie van C en B, want uit $C=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ volgt $A=2C-B$. Dit impliceert dus $A\in F$, wat een tegenspraak is, want het is gegeven dat $A\in E\setminus F$. Dus is $C\in E\cap F$ onmogelijk. Het enige optie is dus $C\in E\setminus F$.
   (b) We weten dat $A\in E\setminus F$ (per definitie) en $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\in E\setminus F$ (uit (a)). Dus is $\langle A,\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\rangle\subseteq\langle E\setminus F\rangle$. Maar $B\in\langle A,\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\rangle$ want het is een affien-lineaire combinatie van deze elementen: $B=-A+2(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$. Dus is $B\in\langle E\setminus F\rangle$.
   (c) Voor een affiene deelruimte G geldt $\langle G\rangle=G$. Dus is $E\setminus F$ geen affiene deelruimte omdat $B\in\langle E\setminus F\rangle$ maar $B\notin E\setminus F$.

6. Laat $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ de kolommen van A zijn, en $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ de kolommen van B. Gegeven is dat

$$A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\sim B\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\qquad A\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\sim B\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\qquad A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\sim B\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right).$$

Met andere woorden,

$$\mathbf{a}_1=\lambda_1\mathbf{b}_1,\qquad \mathbf{a}_2=\lambda_2\mathbf{b}_2,\qquad \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=\lambda_3(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2),$$

voor enkele reële getallen $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_3\neq 0$. De eerste twee vergelijkingen optellen geeft $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2=\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2$. Dit aftrekken van de derde vergelijking geeft $(\lambda_3-\lambda_1)\mathbf{b}_1+(\lambda_3-\lambda_2)\mathbf{b}_2=\mathbf{0}$. Omdat T_B een projectieve transformatie is, is B een inverteerbare matrix. De kolommen $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ zijn dus lineair onafhankelijk. De lineaire combinatie $(\lambda_3-\lambda_1)\mathbf{b}_1+(\lambda_3-\lambda_2)\mathbf{b}_2$ kan dus alleen $\mathbf{0}$ zijn als de coëfficiënten $\lambda_3-\lambda_1$ en $\lambda_3-\lambda_2$ allebei nul zijn. Hieruit volgt $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_2$, en dus is $A=\lambda_1 B$ zoals te bewijzen was.