Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 12 april 2023 13:30–16:30

Gebruik bij iedere opgave een nieuw vel (want deze worden per opgave gesplitst voor het nakijken).

Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.

Je mag een gedrukte of uitgeprinte dictaat gebruiken tijdens het tentamen. Geen andere hulpmiddelen.

---

1. Gegeven is een verzameling X en een functie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $d(x, y) = 0 \iff x = y$ en $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$ voor alle $x, y, z \in X$. Volgt het dat (X, d) een metrische ruimte is? Geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld.* — 1,75 pt.

2. Laat Sp_m en Sp_n twee verschillende spiegelingen in $\mathbb{E}^2$ zijn, en stel dat ze commutatief zijn (dat wil zeggen $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n = \mathrm{Sp}_n \circ \mathrm{Sp}_m$). Laat zien dat $\mathrm{Sp}_m \circ \mathrm{Sp}_n$ een rotatie is en bepaal de mogelijke rotatiehoek(en) van deze rotatie. — 1,5 pt.

3. Laat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ twee verschillende, niet-antipodale punten op de bolschil S^2 zijn. Beschouw de verzameling $m = \{\mathbf{c} \in S^2 : d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{c})\}$. Laat zien dat m een grootcirkel is, en dat m de grootcirkel door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht snijdt. — 1,75 pt.

4. In hyperbolische meetkunde, zijn er gelijkzijdige driehoeken? Geef óf een voorbeeld* van punten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in H^2$ die een gelijkzijdige driehoek definiëren, óf een bewijs dat het niet kan. — 1,5 pt.

5. Laat E en F twee affiene deelruimten van $\mathbb{A}^n$ zijn waarvoor $E \cap F \neq \emptyset$ en $E \setminus F \neq \emptyset$. Laat $A \in E \setminus F$ en $B \in E \cap F$. — 1,75 pt.
   (a) Laat zien dat $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \in E \setminus F$.
   (b) Laat zien dat $B \in \langle E \setminus F \rangle$.
   (Hint: Beschouw $\langle A, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \rangle$.)
   (c) Laat zien dat $E \setminus F$ geen affiene deelruimte is.

6. Laat A en B twee 2×2-matrices zijn die allebei dezelfde projectieve transformatie $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ uitdrukken (dat wil zeggen $P_{A\mathbf{x}} = P_{B\mathbf{x}}$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$). Laat zien dat $A = kB$ voor een reële getal $k \neq 0$. — 1,75 pt.
   (Hint: Beschouw $A\binom{1}{0}$, $A\binom{0}{1}$, en $A\binom{1}{1}$.)

---

*En bewijs dat je voorbeeld voldoet aan de voorwaarden.