Uitwerkingen voor Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 5 juli 2023 13:30–16:30

1. (a) Waar. Het is zelfs genoeg dat f injectief is. Want

$$\begin{aligned} d_f(x,y)=0 &\iff d(f(x),f(y))=0 && \text{(definitie van } d_f\text{)} \\ &\iff f(x)=f(y) && (d \text{ een afstandsfunctie}) \\ &\iff x=y && (f \text{ injectief}) \end{aligned}$$

en de andere nodige eigenschappen volgen uit de definitie van d_f en het feit dat d een afstandsfunctie is:

- $d : A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \implies d_f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $d_f(x,y) = d(f(x),f(y)) = d(f(y),f(x)) = d_f(y,x)$.
- $d_f(x,z)+d_f(z,y) = d(f(x),f(z)) + d(f(z),f(y)) \geq d(f(x),f(y)) = d_f(x,y)$.

(b) Onwaar. Tegenvoorbeelden ontstaan als f niet bijectief maar wel injectief is. Bij voorbeeld, laat $A=\mathbb{Z}$ en laat d de discrete metriek zijn. Het is bekent dat de discrete metriek op elke verzameling een afstandsfunctie is. Dus (A,d) is een metrische ruimte. Laat verder $f(x)=2x$. Deze functie is wel injectief, dus uit (a) weten we dat (A,d_f) een metrische ruimte is. Maar f is geen bijectie (bij voorbeeld is er geen $a \in A$ waarvoor $f(a)=1 \in A$).

2. Het is niet te bepalen of T direct of indirect is. Laat $T_1(\mathbf{x}) = M_1\mathbf{x}+\mathbf{v}$ en $T_2(\mathbf{x}) = M_2\mathbf{x}+\mathbf{v}$, waar $\mathbf{v}=(8,0,0)$ en

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

We berekenen dat $T_1((0,0,0)) = T_2((0,0,0)) = (8,0,0)$, $T_1((1,0,0)) = T_2((1,0,0)) = (8,-1,0)$, en $T_1((0,1,0)) = T_2((0,1,0)) = (7,0,0)$. Verder zijn T_1 en T_2 isometrieën want M_1 en M_2 zijn orthogonale matrices. Maar T_1 is indirect en T_2 is direct want $\det M_1 = -1$ en $\det M_2 = 1$.

3. Ja. Merk op dat $d(\mathbf{n},\mathbf{x}) = \pi/2$ en $d(\mathbf{b},\mathbf{x}) = \pi/2$ voor alle $\mathbf{x} \in X$, maar $d(\mathbf{a},-\mathbf{a}) = \pi$. Daarom kan $T(\mathbf{n})$ niet $\mathbf{a}$ zijn, want dat zou betekenen (omdat T, en daardoor T^{-1}, afstandsbewarend zijn) dat $\pi = d(\mathbf{a},-\mathbf{a}) = d(T^{-1}(\mathbf{a}),T^{-1}(-\mathbf{a})) = d(\mathbf{n},\mathbf{x})$ wat onmogelijk is want er is geen zo'n $\mathbf{x} \in X$. Om dezelfde reden kan $T(\mathbf{n})$ niet $-\mathbf{a}$ zijn, en kan $T(\mathbf{b})$ ook niet $\mathbf{a}$ of $-\mathbf{a}$ zijn. Dat betekent dat of $T(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ en $T(\mathbf{b})=\mathbf{b}$, of $T(\mathbf{n})=\mathbf{b}$ en $T(\mathbf{b})=\mathbf{n}$. In beide gevallen geldt $T(T(\mathbf{n}))=\mathbf{n}$.

De verzameling E bestaat uit alle elementen $\mathbf{e}$ van S^2 met $d(\mathbf{e},\mathbf{n})=\pi/2$. Omdat T afstandsbewarend is en $T(T(\mathbf{n}))=\mathbf{n}$ krijgen we voor alle $\mathbf{e} \in E$ dat $\pi/2 = d(\mathbf{e},\mathbf{n}) = d(T(T(\mathbf{e})),T(T(\mathbf{n}))) = d(T(T(\mathbf{e})),\mathbf{n})$. Met andere worden ligt $T(T(\mathbf{e}))$ op afstand $\pi/2$ van $\mathbf{n}$, dat wilt zeggen $T(T(\mathbf{e})) \in E$.

4. Laat

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ en } \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dit is een Lorentzbasis omdat het voldoet aan

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i \cdot_L \mathbf{v}_i = \begin{cases} -1 & i=1 \\ 1 & i=2,3 \end{cases} \\ \mathbf{v}_i \cdot_L \mathbf{v}_j = 0 \end{cases}$$

Ten opzichte van deze basis is T (rotatie van $\pi/2$ met as $\mathbf{p} = \mathbf{v}_1$) te schrijven als

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

heeft het gegeven punt $(1,0,0)$ coordinaten $(\sqrt{2},0,-1)$ ten opzichte van deze basis. De beeld van deze punt is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uitgedrukt in termen van de oorspronkelijke standaardbasis betekent dat dat

$$T((1,0,0)) = \sqrt{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (2,1,\sqrt{2}).$$

5. Ja. Laat $A \in E$. Omdat E niet volledige dimensie hebt zijn er elementen van $\mathbb{A}^n$ die niet in E bevat zijn. Laat $B \notin E$. Dan is $L = \langle A, B\rangle$ een affiene deelruimte van dimensie 1. De doorsnede $E \cap L$ bevat alleen het element A. Want stel dat de doorsnede $E \cap L$ ook een andere punt C zou bevatten. Dan is C een affien-lineaire combinatie van A en B, omdat C een element van L is. Dan is ook B een affien-lineaire combinatie van A en C, want uit $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, waar $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, volgt $B = (-\lambda_1/\lambda_2)A + (1/\lambda_2)C$, waar $(-\lambda_1/\lambda_2) + (1/\lambda_2) = 1$. Maar $A, C \in E$ en E, omdat het een affiene deelrumite is, bevat alle affien-lineaire combinaties van zijn elementen, dus $B \in E$, wat een tegenspraak is. De doorsnede $E \cap L$ kan dus inderdaad geen andere punten behalve A bevatten. De dimensiestelling geeft nu

$$\dim\langle E, L\rangle = \dim E + \dim L + \dim E \cap L = n - 1 + 1 + 0 = n$$

dat wilt zeggen $\langle E, L\rangle = \mathbb{A}^n$.

Laat $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ de affiene transformatie

$$T(\mathbf{x}) = I_n\mathbf{x} + (-\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

zijn. Dan is $T(A) = B$. Dus B is bevat in $\langle E \cup T(E)\rangle$. En ook $A \in E$ is bevat in $\langle E \cup T(E)\rangle$. Dus $\langle E \cup T(E)\rangle$ bevat L en dus $\langle E, L\rangle$ en dus de hele $\mathbb{A}^n$.

6. Nee. Laat

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

T is een projectieve transformatie $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ omdat het een inverteerbare 3×3 matrix is ($\det = -6 \neq 0$). We berekenen dat $T((1:1:0)) = (3:3:0) = (1:1:0)$, $T((1:-1:0)) = (1:-1:0)$, $T((1:0:1)) = (2:0:2) = (1:0:1)$, en $T((1:0:0)) = (1:2:0) \neq (1:0:0)$. Dit is dus een tegenvoorbeeld.