Tentamen WISB141 Inleiding Meetkunde

woensdag 5 juli 2023 13:30–16:30

- Gebruik bij iedere opgave een nieuw vel (want deze worden per opgave gesplitst voor het nakijken).
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Je mag een gedrukte of uitgeprinte dictaat gebruiken tijdens het tentamen. Geen andere hulpmiddelen.

---

1. Gegeven zijn een metrische ruimte (A, d) en een functie $f : A \to A$. Laat d_f gedefinieerd zijn door $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$. Voor de volgende uitspraken, geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld.* — 1,75 pt.
   (a) Als f bijectief is, dan is (A, d_f) een metrische ruimte.
   (b) Als f niet bijectief is, dan is (A, d_f) geen metrische ruimte.
2. Laat $T : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ een isometrie van de Euclidische ruimte zijn waarvoor $T((0, 0, 0)) = (8, 0, 0)$, $T((1, 0, 0)) = (8, -1, 0)$, en $T((0, 1, 0)) = (7, 0, 0)$. Bewijs een van de volgende drie uitspraken: T is een directe isometrie; T is een indirecte isometrie; het is niet te bepalen of T direct of indirect is. — 1,5 pt.
3. Op de bolschil S^2, laat X de verzameling van de punten $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, en $-\mathbf{a} = (-1, 0, 0)$ zijn. Laat E de doorsnede van S^2 met het xy-vlak zijn. Laat $T : S^2 \to S^2$ een isometrie zijn waarvoor $T(\mathbf{x}) \in X$, voor alle $\mathbf{x} \in X$. Volgt het dat $T(T(\mathbf{e})) \in E$ voor alle $\mathbf{e} \in E$? Geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld.* — 1,5 pt.
4. Laat $\mathbf{p} = (\sqrt{2}, 0, 1) \in H^2$ en beschouw de H^2-rotatie $T = \mathrm{Rot}_{\mathbf{p},\pi/2}$. Bepaal $T((1, 0, 0))$. — 1,75 pt.

   (Hint: Werk ten opzichte van een Lorentzbasis met $\mathbf{p}$ als een van de basisvectoren (maar geef je antwoord in termen van de oorspronkelijke standaardbasis).)
5. Laat E een affiene deelruimte van $\mathbb{A}^n$ zijn met $\dim E = n - 1$. Volgt het dat er een affiene transformatie T bestaat zo dat $\langle E \cup T(E) \rangle = \mathbb{A}^n$? Bewijs je bewering. — 1,75 pt.
6. Laat $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ een projectieve transformatie zijn waarvoor $T((1 : 1 : 0)) = (1 : 1 : 0)$, $T((1 : -1 : 0)) = (1 : -1 : 0)$, en $T((1 : 0 : 1)) = (1 : 0 : 1)$. Volgt het dat $T((1 : 0 : 0)) = (1 : 0 : 0)$? Geef óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld.* — 1,75 pt.

---

*En bewijs dat je voorbeeld voldoet aan de voorwaarden.