INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2022–2023

TENTAMEN 26 JUNI 2023, 13:30-16:30 (EXTRA TIJD TOT 17:00)

- Het tentamen bestaat uit vier vragen (die op hun beurt weer bestaan uit deelvragen). Gebruik voor het beantwoorden van elk van de vier vragen een apart, los vel examenpapier en schrijf op ieder vel je volledige naam en studentnummer. (Let op: de tentamenvragen worden parallel nagekeken, en daarvoor wordt je ingeleverde werk verdeeld over meerdere nakijkers. Als je naam niet op ieder vel staat kan je werk verloren gaan.)
- Het tentamen is “open boek”. Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren exemplaar, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen; je mag wel ‘typen’ op een touchscreen (zonder geluid)
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat “e(x)=x” moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken, ook van het werkcollege. Je mag geen andere boeken of bronnen gebruiken, maar wel een rekenmachine.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.
- De surveillanten bij het tentamen zijn docenten van het vak. Bij inhoudelijke vragen kan je hen aanspreken.

Succes!

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Vraag 1.

10pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{129}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2023)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2022$.

10pt (b) Is de permutatie $(1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9)(10\,11\,12\,13\,14)(15\,16\,17\,18\,19\,20) \in S_{2023}$ een element van A_{2023}?

10pt (c) Stel $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 18. Schrijf het element

$$r^{26} s r^{2023} \in D_{18}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

10pt (d) Bekijk de ring R bestaande uit oneindig lange rijtjes $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ van gehele getallen $a_i \in \mathbf{Z}$ (voor alle $i = 1, 2, \dots$), waarbij optelling en vermenigvuldiging componentsgewijs zijn gedefinieerd, dus

$$(a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty} := (a_i + b_i)_{i=1}^{\infty},$$
$$(a_i)_{i=1}^{\infty} \cdot (b_i)_{i=1}^{\infty} := (a_i \cdot b_i)_{i=1}^{\infty};$$

en bekijk de deelverzameling I van R bestaande uit elementen $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in R$ met de eigenschap dat a_i deelbaar is door i, voor alle $i = 1, 2, \dots$. Bewijs dat I een ideaal is in R. (Je hoeft niet te bewijzen dat R een ring is.)

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

10pt (a) De afbeelding $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ gegeven door $m \mapsto |\det(m)|$ (absolute waarde van de determinant van de matrix) is een groepshomomorfisme.

10pt (b) Stel dat B een baan is voor de actie van een groep van orde 2023 op een eindige verzameling. Er zijn hoogstens 6 verschillende mogelijke waarden voor het aantal elementen van B.

10pt (c) De ringen $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$ en $\mathbf{C}[x]/(x^2+1)$ zijn isomorf.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

10pt (a) Voor elk oneven priemgetal p, een groep G van orde $2p$ en een surjectief groepshomomorfisme $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2$ waarvan de kern geen cyclische groep is.

10pt (b) Een ring R en een ideaal I in R dat geen maximaal ideaal is, geen hoofdideaal is, maar wel een priemideaal is.

Vraag 4.

5pt (a) Geef een voorbeeld van een commutatieve ring R met $1 \neq 0$ en een ideaal $I \subseteq R$ waarvoor $|R^*| > 1$ en $|(R/I)^*| = 1$ en bewijs je bewering.

5pt (b) Geef een voorbeeld van een commutatieve ring R met $1 \neq 0$ en een ideaal $I \subseteq R$ waarvoor $|R^*| = 1$ en $|(R/I)^*| > 1$ en bewijs je bewering.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

Notation. $\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Question 1.

10pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{129}$ in the group $(\mathbf{Z}/2023)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2022$.

10pt (b) Is the permutation $(1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9)(10\,11\,12\,13\,14)(15\,16\,17\,18\,19\,20) \in S_{2023}$ an element of A_{2023}?

10pt (c) Let $D_{18} = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ denote the dihedral group of order 18. Write the element
$$r^{26}sr^{2023} \in D_{18}$$
using at most 3 symbols (every letter, sign and digit count as one symbol).

10pt (d) Consider the ring R consisting of infinitely long sequences $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ of integers $a_i \in \mathbf{Z}$ (for all $i = 1, 2, \dots$), where addition and multiplication are defined componentwise, so
$$(a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty} := (a_i + b_i)_{i=1}^{\infty},$$
$$(a_i)_{i=1}^{\infty} \cdot (b_i)_{i=1}^{\infty} := (a_i \cdot b_i)_{i=1}^{\infty};$$
and consider the subset I of R consisting of elements $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in R$ with the property that a_i is divisible by i, for all $i = 1, 2, \dots$. Prove that I is an ideal in R. (You do not need to prove that R is a ring.)

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

10pt (a) The map $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ given by $m \mapsto |\det(m)|$ (absolute of the determinant of a matrix) is a group homomorphism.

10pt (b) Suppose that B is an orbit for the action of a group of order 2023 on a finite set. The number of elements of B can take on at most 6 values.

10pt (c) The rings $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)$ and $\mathbf{C}[x]/(x^2+1)$ are isomorphic.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

10pt (a) For every odd prime number p, a group G of order $2p$ and a surjective group homomorphism $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2$ whose kernel is not a cyclic group.

10pt (b) A ring R and an ideal I of R that is not maximal, not principal, but that is a prime ideal.

Question 4.

5pt (a) Give an example of a commutative ring R with $1 \neq 0$ and an ideal $I \subseteq R$ for which $|R^*| > 1$ and $|(R/I)^*| = 1$ and prove this.

5pt (b) Give an example of a commutative ring R with $1 \neq 0$ and an ideal $I \subseteq R$ for which $|R^*| = 1$ and $|(R/I)^*| > 1$ and prove this.

End of the exam