INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2022–2023

HERTENTAMEN 10 JULI 2023, 13:30-16:30 (EXTRA TIJD TOT 17:00)

- Het tentamen bestaat uit vier vragen (die op hun beurt weer bestaan uit deelvragen). Gebruik voor het beantwoorden van elk van de vier vragen een apart, los vel examenpapier en schrijf op ieder vel je volledige naam en studentnummer. (Let op: de tentamenvragen worden parallel nagekeken, en daarvoor wordt je ingeleverde werk verdeeld over meerdere nakijkers. Als je naam niet op ieder vel staat kan je werk verloren gaan.)
- Het tentamen is “open boek”. Dit betekent dat je het boek van Dummit & Foote mag gebruiken bij het tentamen, hetzij een papieren exemplaar, hetzij een digitale kopie op een meegebrachte laptop of tablet (geen telefoon); dit laatste onder volgende strikte voorwaarden:
  - wifi en mobiele data zijn ten allen tijde uitgeschakeld
  - geluid staat op mute
  - zorg ervoor dat voor aanvang van het tentamen alles is klaargezet en het document geopend is
  - je mag niet typen (ook niet om naar een woord zoeken), enkel scrollen; je mag wel ‘typen’ op een touchscreen (zonder geluid)
  - surveillanten mogen altijd meekijken naar je scherm
  - eventuele fraude zal worden gemeld bij de examencommissie
  - bij technische problemen (zoals bijv. een lege batterij) met je device zijn de surveillanten niet verantwoordelijk.

  Bij het tentamen mag je ook een printout gebruiken van hoofdstuk 17 en 18 over groepsacties uit het boek van Armstrong (op deze printout mag niets extra geschreven staan, behalve de correctie dat “e(x)=x” moet gelden op de eerste pagina). Bij het tentamen mag je ook je eigen aantekeningen meebrengen en gebruiken, ook van het werkcollege. Je mag geen andere boeken of bronnen gebruiken, maar wel een rekenmachine.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Bij het geven van bewijzen mag je gebruik maken van alle kennis die je hebt opgedaan in de cursus, maar geef een eenduidige verwijzing als je iets gebruikt (bijv. naam van een stelling; verwijzing naar boek met paginanummer). Je mag zonder bewijs gebruik maken van stellingen uit de boeken of het hoorcollege, maar niet uit (zelfs gemaakte) opgaves.
- De surveillanten bij het tentamen zijn docenten van het vak. Bij inhoudelijke vragen kan je hen aanspreken.

Succes!

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

Notatie: $\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$; voor $m \in \mathbf{Z}$ is $\overline{m}$ de notatie voor de corresponderende klasse in $\mathbf{Z}/N$. Je mag gebruiken dat het huidige jaar als volgt ontbindt in priemfactoren: $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Vraag 1.

10pt (a) Bereken de inverse van het element $\overline{120}$ in de groep $(\mathbf{Z}/2023)^*$ voor vermenigvuldiging, en schrijf het resultaat als $\overline{m}$ met $0 \leq m \leq 2022$.

10pt (b) Bereken de orde van de elementen $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

10pt (c) Stel $D_{16} = \langle r, s \mid r^8 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ is de diëdergroep van orde 16. Schrijf het element

$$r^{10} s^7 r^{2023} \in D_{16}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

10pt (d) De ring $\mathbf{R}[x]$ is een hoofdideaaldomein, dus er bestaat een $a \in \mathbf{R}[x]$ zodat

$$(x^{2023} - 1) \cap (x^2 - 1) = (a).$$

Vind een dergelijke a.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

10pt (a) Als G een groep is van orde 2023 en $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/7$ een surjectief groepshomomorfisme, dan bevat $\ker \varphi$ een element van orde 17.

10pt (b) De actie van A_{2023} op $X = \{1, 2, \ldots, 2023\}$ door permutatie heeft ten minste twee banen.

10pt (c) De ringen $\mathbf{R}[x]/(x^3 - 1)$ en $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ zijn isomorf.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

10pt (a) Een even permutatie die te schrijven is als product van 4-cykels.

10pt (b) Een commutatieve ring R met $1 \neq 0$ waarin $1 + 1 = 0$ en een ideaal I in R zodat R/I een lichaam is met minstens drie elementen.

10pt **Vraag 4.** We bekijken een willekeurig domein R. Als in R iedere eindige doorsnede van hoofdidealen weer een hoofdideaal is, dan is ieder irreducibel element in R priem.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

Notation. $\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, and for $m \in \mathbf{Z}$, $\overline{m}$ denotes the corresponding class in $\mathbf{Z}/N$. You may use that the current year has prime factorisation $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Question 1.

10pt (a) Compute the multiplicative inverse of $\overline{120}$ in the group $(\mathbf{Z}/2023)^*$ and write the result as $\overline{m}$ with $0 \leq m \leq 2022$.

10pt (b) Compute the order of the elements $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ and $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

10pt (c) Let $D_{16} = \langle r, s \mid r^8 = s^2 = e, rsr = s \rangle$ denote the dihedral group of order 16. Write the element

$$r^{10} s^7 r^{2023} \in D_{16}$$

using at most 3 symbols (every letter, sign and digit count as one symbol).

10pt (d) The ring $\mathbf{R}[x]$ is a principal ideal domain, so there exists $a \in \mathbf{R}[x]$ for which

$$(x^{2023} - 1) \cap (x^2 - 1) = (a).$$

Find such a.

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

10pt (a) If G is a group of order 2023 and $\varphi \colon G \to \mathbf{Z}/7$ a surjective group homomorphism, then $\ker \varphi$ contains an element of order 17.

10pt (b) The action of A_{2023} on $X = \{1, 2, \ldots, 2023\}$ by permutation has at least two orbits.

10pt (c) The rings $\mathbf{R}[x]/(x^3 - 1)$ and $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ are isomorphic.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

10pt (a) An even permutation that can be written as a product of 4-cycles.

10pt (b) A commutative ring R with $1 \neq 0$ for which $1 + 1 = 0$, and an ideal I of R such that R/I is a field with at least 3 elements.

Question 4. We consider an arbitrary integral domain R. If in R every finite intersection of principal ideals is again a principal ideal, then every irreducible element of R is prime.

End of the exam