1(a) Voor alle $x < c$ geldt $f(x) \leq f(c)$ (f monotoon stijgend), dus $\sup_{x<c} f \leq f(c)$. Voor alle $c < x$ geldt $f(c) \leq f(x)$ (f monotoon stijgend) dus $f(c) \leq \inf_{c<x} f$. (b) Stel f continu. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x - c| < \delta$ geldt $|f(x) - f(c)| < \epsilon/4$. Er is een $x < c$ zodanig dat $|\alpha - f(x)| < \epsilon/4$ (sup is een limietpunt). Er is een $x < c$ waarvoor <u>bovendien</u> $|x - c| < \delta$ en dus $|f(x) - f(c)| < \epsilon/4$. Evenzo bestaat er een $c < y$ zodanig dat $|f(y) - \beta| < \epsilon/4$ en $|f(y) - f(c)| < \epsilon/4$. Dus $|\alpha-\beta| \leq |\alpha-f(x)|+|f(x)-f(c)|+|f(c)-f(y)|+|f(y)-\beta| < \epsilon$ (driehoeksongelijkheid). Aangezien $\epsilon > 0$ willekeurig, geldt $\alpha = \beta$. Stel $\alpha = \beta$. Zij $\epsilon > 0$, dan is er een $x < c$ met $\alpha - f(x) < \epsilon/5$ en er is een $c < y$ met $f(y) - \beta < \epsilon/5$ (sup/inf zijn limietpunten). Dus $f(y)-f(x) < 2\epsilon/5$ ($\alpha = \beta$). Merk op $\alpha = \beta = f(c)$. Neem $\delta > 0$ met $]c-\delta, c+\delta[\subset [x, y]$. Voor alle $\xi \in]c-\delta, c+\delta[$ geldt $|f(\xi)-f(c)| \leq |f(\xi)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(c)| \leq 2|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(c)| < 4\epsilon/5+\epsilon/5 = \epsilon$. Dus f is continu. (c) Stel f is continu, dan is $f(\mathbb{R})$ een interval (stelling diktaat of kort argument met tussenwaardestelling). Stel $f(\mathbb{R})$ is een interval en f is niet continu in $c \in \mathbb{R}$. Gebruik notatie boven. Vanwege (b) hebben we $\alpha < \beta$. Neem $x < c < y$, dan $f(x) \leq \alpha \leq f(c) \leq \beta \leq f(y)$ dus $[\alpha, \beta] \subset f(\mathbb{R})$. Pak $\gamma \in]\alpha, \beta[\setminus\{f(c)\}$. Dan is er een $\xi \in \mathbb{R}$ met $f(\xi) = \gamma$. Echter, $\xi = c$ kan niet want dan $\gamma \neq f(c)$; $\xi < c$ kan niet want dan $\gamma \leq \alpha$; $c < \xi$ kan niet want dan $\beta \leq \gamma$.

2(a) Een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in een metrische ruimte V heet Cauchy als voor alle $\epsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zodanig dat voor alle $m, n > N$ geldt $d(a_m, a_n) < \epsilon$. Neem $a_n = 1/\sqrt{n}$ en zij $\epsilon > 0$. Neem $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat $2/N < \epsilon^2$. Voor alle $m, n > N$ geldt $|1/\sqrt{m}-1/\sqrt{n}|^2 \leq |1/\sqrt{m}-1/\sqrt{n}||1/\sqrt{m}+1/\sqrt{n}| = |1/m-1/n| \leq 1/m+1/n < 2/N < \epsilon^2$. Worteltrekken toont aan dat $(a_n)_{n\geq 1}$ Cauchy is. Feiten diktaat: $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ en $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ dus continuïteit $\sqrt{\cdot}$ geeft $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (b) Zij $(n_k \in \mathbb{Z}_{>0})_{k\geq 1}$ de rij niet-kwadraten. Dan is $(b_k = 1/\sqrt{n_k})_{k\geq 1}$ een rij in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (hint). Deze rij is ook Cauchy: zij $\epsilon > 0$ en N met $2/N < \epsilon^2$ als boven, dan voor alle $k, l > N$ geldt $|b_k-b_l| \leq 1/n_k+1/n_l$ (als boven) en dit is $\leq 1/k + 1/l < 2/N < \epsilon^2$ (want $n_k \geq k$, $n_l \geq l$). Vanwege (a) geldt $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{Q}$ dus $(b_k)_{k\geq 1}$ convergeert niet in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3(a) Een verzameling D in een metrische ruimte V heet rijcompact als elke rij $(a_n)_{n\geq 0}$ in D een convergente deelrij heeft met limiet in D. (b) Vanwege stelling over rijcompacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ geldt dat iedere D_i gesloten en begrensd is. Dus $\cap_{i\in I} D_i$ is gesloten (resultaat diktaat). Voorts, neem een $i_0 \in I$ dan $D_{i_0} \subset B(0; r)$ voor een $r > 0$ dus $\cap_{i\in I} D_i \subset D_{i_0} \subset B(0; r)$. De stelling over rijcompacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ impliceert dat $\cap_{i\in I} D_i$ rijcompact is.

4(a) Uit de hoofdstelling van de integraalrekening volgt voor alle $x \geq a$ geldt $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \geq F(a) + \int_a^x c dt = F(a) + c(x - a)$. Voor $R > 0$ kies $x \in \mathbb{R}$ zodanig dat $c(x - a) + F(a) > R$ ($c > 0$). Dan $F(x) > R$. (b) Merk op dat $f(x) < 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Neem $a \in \mathbb{R}$ en definieer $c := f(a) < 0$. Dan voor alle $x \leq a$ geldt $f(x) \leq c$, dus (hoofdstelling) $F(a) - F(x) = \int_x^a f(t)dt \leq c(a - x)$ dus $F(x) \geq F(a) + c(x - a)$. Voor $R > 0$ kies $x \in \mathbb{R}$ met $F(a) + c(x - a) > R$ ($c < 0$), dus $F(x) > R$. (c) Stel niet. Vanwege de tussenwaardestelling geldt (1) $g''(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ of (2) $g''(x) < 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Stel (1), dan g' strikt monotoon stijgend. Stel er is een $a \in \mathbb{R}$ met $g'(a) = c > 0$. Dan is (a) in tegenspraak met het gegeven dat g van boven begrensd is (neem $F = g$). Stel voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $g'(x) \leq 0$. Dan is (b) in tegenspraak met het gegeven dat g van boven begrensd is (neem $F = g$). Stel (2). Eenzelfde redenering leidt tot tegenspraken voor $h = -g$ (waar we nu gebruiken dat g van onderen begrensd is).