Tentamen analyse 11-4-2023 Je mag resultaten uit het boek/hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Alle 10 onderdelen hebben gelijk gewicht.

Opgave 1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie en $c \in \mathbb{R}$. Definieer

$$\alpha := \sup\{f(x) \,:\, x < c\}, \quad \beta := \inf\{f(x) \,:\, c < x\}.$$

(a) Bewijs dat $\alpha \leq f(c) \leq \beta$.
(b) Bewijs dat f continu is in c dan en slechts dan als $\alpha = \beta$.
(c) Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als het beeld $f(\mathbb{R})$ een interval is.

Opgave 2. Beschouw de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ met $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(a) Geef de definitie van een Cauchy-rij. Bewijs *vanuit de definitie* dat $(a_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij is. Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) Bewijs dat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ niet volledig is. *Hint: Je mag (zonder bewijs) gebruiken dat als* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *geen kwadraat is, d.w.z. niet van de vorm* m^2 *voor een* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$*, dan geldt* $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Opgave 3.

(a) Geef de definitie van een rijcompacte deelverzameling van een metrische ruimte.
(b) Zij $V = \mathbb{R}^n$ een Euclidische ruimte en $\{D_i \,:\, i \in I\}$ een collectie rijcompacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ met $I \neq \varnothing$ en $D_i \neq \varnothing$ voor alle $i \in I$. Bewijs dat $\bigcap_{i\in I} D_i$ rijcompact is. *Hint: gebruik de stelling uit het diktaat die rijcompacte deelverzamelingen van* $\mathbb{R}^n$ *karakteriseert.*

Opgave 4.

(a) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie met primitieve $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stel er zijn $a \in \mathbb{R}$ en $c > 0$ zodanig dat $f(x) > c$ voor alle $x \geq a$. Bewijs dat er voor alle $R \in \mathbb{R}$ een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $F(x) > R$.
(b) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie met primitieve $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stel $f(x) \leq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en f is strikt monotoon stijgend. Bewijs dat er voor alle $R \in \mathbb{R}$ een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $F(x) > R$.
(c) Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie waarvoor de afgeleiden g', g'' bestaan en continu zijn op $\mathbb{R}$. Bewijs dat er een $\xi \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $g''(\xi) = 0$.