1(a) Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij met deelrij $(a_{n_k})_{k\geq 0}$. Zij $\epsilon > 0$, dan is er een N zodanig dat voor alle $m,n > N$ geldt $d(a_m,a_n) < \epsilon$. Dus voor alle $k,l > N$ hebben we $n_k \geq k > N$, $n_l \geq l > N$ en derhalve $d(a_{n_k},a_{n_l}) < \epsilon$. (b) Stel f uniform continu en zij $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ twee rijen in V met $\lim_{n\to\infty} d_V(a_n,b_n) = 0$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x,y \in V$ met $d_V(x,y) < \delta$ geldt $d_W(f(x),f(y)) < \epsilon$. Voorts is er een $N > 0$ zondanig dat voor alle $n > N$ geldt $d_V(a_n,b_n) < \delta$. Dus voor alle $n > N$ geldt $d_W(f(a_n),f(b_n)) < \delta$. Voor de omkering, neem de hypothese aan en stel f is niet uniform continu. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zijn er a_n, b_n in V met $d_V(a_n,b_n) < 1/n$ en $d_W(f(a_n),f(b_n)) \geq \epsilon$. Met de insluitstelling $\lim_{n\to\infty} d_V(a_n,b_n) = 0$ en dus $\lim_{n\to\infty} d_W(f(a_n),f(b_n)) = 0$; tegenspraak. (c) Met de standaardrekenregels voor differentiatie en de afgeleide van $\sqrt{x}$, bepalen we de afgeleiden van $f : [-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Het resultaat is $f'(x) = 1/(2(1+x)^{1/2})$, $f''(x) = -1/(4(1+x)^{3/2})$, $f'''(x) = 3/(8(1+x)^{5/2})$. De formule van Taylor geeft dat er voor elke $x > 0$ een $0 < c < x$ bestaat zodanig dat $|f(x) - (f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2)| = x^3/(16(1+c)^{5/2}) < x^3/16$.
2(a) Neem een Cauchy-rij in W. Dit is een Cauchy-rij in V (W heeft geïnduceerde metriek). Deze rij heeft dus een limiet in V (V is volledig), en die limiet ligt in W (W is gesloten). (b) Zij $(a_n \in D_1 \cap D_2)_{n\geq 0}$. Dan is er een deelrij $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ met $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in D_1$ (D_1 rij-compact). Dus is er een deelrij $(a_{n_{k_l}})_{l\geq 0}$ met $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} \in D_2$ (D_2 rij-compact). Voorts $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in D_1$ dus $a \in D_1 \cap D_2$. (c) $\mathbb{R}$ en dus I is volledig (onderdeel (a)). Voorts geldt $f(I) \subset I$ vanwege de aannames op a, b. We hebben $|f(x) - f(y)| = |x-y|/|xy| \leq (1/a^2)|x-y|$ met $0 < 1/a^2 < 1$ dus f is een contractie. Volgens de contractiestelling is er een $\xi \in \mathbb{R}$ met $2 + 1/\xi = \xi$. Oplossen geeft $\xi = 1 + \sqrt{2}$. We zien $a \leq \xi \leq b$ geeft $f(b) \leq f(\xi) = \xi \leq f(a)$ dus $f(f(a)) \leq f(\xi) = \xi \leq f(f(b))$.
3(a) (Plaatje ontbreekt!) Teken de grafiek van $y = x$, $y = -x$, $y = 1$ die elkaar snijden in $(0,0), (\pm 1, 1)$: dit is N_0. Identificeer 7 padsamenhangende deelverzamelingen in $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$. Tekens langs y-as: $-,-,+$ en langs x-as: $+/+$. De twee overige gebieden hebben teken $-$. Aangezien $f(x,y) = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$ een polynoom is, bestaan de afgeleiden naar x, y en zijn ze gelijk aan $(-2xy + 2x, 3y^2 - x^2 - 2y)$ (standaard rekenregels differentiatie). Beide op nul stellen geeft $x = 0$ of $y = 1$. We krijgen stationaire punten $(0,0), (0, \frac{2}{3}), (\pm 1, 1)$. Dit zijn de *mogelijke* lokale maxima/minima. Uit het tekenschema volgt dat alleen $(0, \frac{2}{3})$ een lokaal maximum/minimum kan zijn. Dit punt ligt in het inwendige van $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, y \geq -x, y \leq 1\} = h^{-1}(\mathbb{R}^3_{\geq 0})$ met $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x,y) = (y - x, y + x, 1 - y)$. Aangezien $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$ gesloten is en h continu, zien we dat D gesloten is (resultaat dictaat). D is evident begrensd en dus neemt f hier een maximum en minimum aan (max/min stelling). Dus $(0, \frac{2}{3})$ is een lokaal minimum.
4(a) Uit de hoofdstelling van de integraalrekening weten we dat $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$ voor alle $x, a \in \mathbb{R}$. Zij $a \in \mathbb{R}$ willekeurig en $c := f'(a) > 0$ (f strikt monotoon stijgend). Stel f' is monotoon stijgend of $\mathbb{R}$. Dan voor alle $x \geq a$ geldt $f'(x) \geq c$ en dus $f(x) - f(a) \geq c(x-a)$ (resultaat dictaat). Aangezien $c > 0$ is dit in tegenspraak met f van boven begrensd. Evenzo, stel f' is monotoon dalend op $\mathbb{R}$, dan voor alle $x \leq a$ geldt $f'(x) \geq c$ en dus $f(a) - f(x) \geq c(a - x)$ (resultaat dictaat). Dit is een tegenspraak met f van onderen begrensd. (b) Neem een verdeling $V = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$. Aangezien $[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ (hint), is er een $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ met $f(\xi) = 1$. Derhalve geldt $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f = 1$ en dus $\overline{S}(f, V) = \sum_i (x_i - x_{i-1}) = 1 - 0 = 1$. Aangezien $[x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$ (hint), is er een $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ met $f(\xi) = 0$ en dus geldt $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f = 0$ en derhalve $\underline{S}(f, V) = 0$. We deduceren dat $\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$. Dus is f niet Riemann-integreerbaar.