Hertentamen analyse 4-7-2023 Je mag resultaten uit het boek/hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Alle 10 onderdelen hebben gelijk gewicht, behalve vraag 3 die 2 punten waard is.

Vraag 1.

(a) Bewijs dat een deelrij van een Cauchy-rij een Cauchy-rij is.

(b) Zij $f : V \to W$ een afbeelding tussen metrische ruimten (V, d_V) en (W, d_W). Bewijs dat f uniform continu is dan en slechts dan als voor elk tweetal rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ in V die voldoen aan $\lim_{n\to\infty} d_V(a_n, b_n) = 0$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} d_W(f(a_n), f(b_n)) = 0$.

(c) Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt dat $|\sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2)| < \frac{1}{16}x^3$.

Vraag 2.

(a) Zij (V, d_V) een volledige metrische ruimte en $W \subset V$ een niet-lege gesloten deelverzameling. Bewijs dat W, met metriek $d_V : W \times W \to \mathbb{R}$, volledig is.

(b) Zij D_1 en D_2 rij-compacte deelverzamelingen van een metrische ruimte V. Bewijs dat $D_1 \cap D_2$ rij-compact is.

(c) Zij $I = [a, b]$ een interval met de volgende eigenschappen (1) $a > 1$, (2) $a \leq 2+1/b$ en (3) $2 + 1/a \leq b$. Bijvoorbeeld $a = 11/10$ en $b = 3$. Bewijs dat de functie $f : I \to I$, $f(x) = 2 + 1/x$ een contractie is. Bepaal het vaste punt $\xi \in \mathbb{R}$ en bewijs dat het voldoet aan

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{a}} \leq \xi \leq 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{b}}.$$

Vraag 3. (**2 punten**) Beschouw de functie

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = (y - x)(y + x)(y - 1).$$

Bepaal de stationaire punten van g. Bepaal de niveauverzameling N_0 van g. Geef aan welke delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ padsamenhangend zijn: je hoeft dit niet formeel te bewijzen. Bepaal voor de padsamenhangende delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ of g daar positief of negatief is en vind de lokale maxima en minima van g.

Vraag 4.

(a) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde, strikt monotoon stijgende functie met continue afgeleide $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bewijs dat f' niet monotoon stijgend is op heel $\mathbb{R}$. Bewijs ook dat f' niet monotoon dalend is op heel $\mathbb{R}$.

(b) Beschouw de functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ met $f(x) = 1$ als $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = 0$ als $x \notin \mathbb{Q}$. Bewijs dat f *niet* Riemann-integreerbaar is. *Hint: Je mag zonder bewijs gebruiken dat voor ieder segment* $[a, b] \subset [0, 1]$ *met* $a < b$ *geldt dat* $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ *and* $[a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$.