Opgave 1.

5 a) We kunnen Sym(n) beschrijven als

$$\text{Sym}(n) = \{A \in M_{nn} \mid A = A^t\}.$$

We laten zien dat Sym(n) voldoet aan def 7.1.1:

1) De nulmatrix $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \text{Sym}(n)$ want $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2) Als $A, B \in \text{Sym}(n)$, dan geldt:

$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, dus $A+B \in \text{Sym}(n)$.

3) Als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $A \in \text{Sym}(n)$ dan geldt:

$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$, dus $\lambda A \in \text{Sym}(n)$.

5 b) Bewering: $B = \{ \underset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E_5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \}$

is een basis voor Sym(3).

Bewijs: 1) We bewijzen dat $E_1, .., E_6$ onafhankelijk zijn.

Bewijs: laat $\lambda_1 .. \lambda_6 \in \mathbb{R}$ en

$\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_6 E_6 = 0$. Dan geldt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} = 0$ dus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$

dus de enige relatie tussen $E_1, \ldots E_6$ is de triviale relatie.

2) We bewijzen dat $E_1, .. E_6$ heel Sym(3) opspannen.

laat $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \text{Sym}(3)$ willekeurig.

Omdat $A = A^t$ geldt $b = d$, $c = g$, $f = h$, dus

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + eE_4 + fE_5 + iE_6 \in \text{Span}(B).$$

Uit 1)+2) volgt dat B een basis is van Sym(3).

5 c) Uit b) volgt dat $\dim(\text{Sym}(3)) = 6$

5 d) Definieer $L: M_{nn} \to M_{nn}$ door

$$L(A) = A - A^t.$$

1) Dan is L lineair:

Laat $A, B \in M_{nn}$ willekeurig, dan geldt:

$$L(A+B) = A+B - (A+B)^t = A+B - (A^t+B^t)$$
$$= A - A^t + B - B^t = L(A) + L(B) \text{ voor alle } A, B \in M_{nn}$$

en $L(\lambda A) = \lambda A - (\lambda A)^t = \lambda A - \lambda A^t = \lambda(A - A^t) = \lambda L(A)$

voor alle $A \in M_{nn}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Er geldt: $A \in \text{Ker}(L) \Leftrightarrow L(A) = A - A^t = 0$

$\Leftrightarrow A = A^t$

Dus $\text{Ker}(L) = \text{Sym}(n)$

5 e) De afbeelding L is niet surjectief voor $n=3$:

Volgens de dimensiestelling geldt

$$\dim(M_{nn}) = \dim(\text{Ker}(L)) + \dim(L(M_{nn}))$$

Omdat $\dim(\text{Ker}(L)) = 6 > 0$ (volgens c)

is $\dim(L(M_{nn})) < \dim(M_{nn})$.

10

Opgave 2.

Er geldt : $f \in \ker(L) \Leftrightarrow f'' - 4f' + 13f = 0$

Deze differentiaalvergelijking heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$. $(*)$

We bepalen de nulpunten van $(*)$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Hieruit volgt dat de oplossingsverzameling van $L(f) = 0$ basis: $\{e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$

30

## Opgave 3

We onderzoeken de afbeeldingen 1 t/m 3 en bekijken per afbeelding welke uitspraak hierbij past.

Afbeeldingen:

10

1) $A_E^E = \left( A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_E \;\; A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_E \right) = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

e.w: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = 3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1$

$= \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$

Dus $\lambda_1=\lambda_2=2$. heeft algebraische multipliciteit 2.

e.v. $\lambda=2$: $\text{nul}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \text{nul}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R} \right\}$

Dus $E_2$ heeft meetkundige multiplicteit 1

Dus A is niet diagonaliseerbaar

$\Rightarrow$ Bewering A is waar

alternatief: Als A wel diagonaliseerbaar is dan is A geconjungeerd aan $2I$, dus $A = 2I$ want $A = S2IS^{-1}$ $= SS^{-1}2I$ $= 2I$.

8

2) De afbeelding A wordt ten opzichte van de standaard orthonormale basis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ gegeven door een symmetrische matrix $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

Dus A is diagonaliseerbaar en heeft een orthonormale basis van eigenvectoren $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$.

Er geldt $\quad A = A_E^E = \underbrace{I_E^B}_{(\bar{b}_1\ \bar{b}_2)} A_B^B\, I_B^E$

Dus $I_E^B$ is een orthogonale matrix. $\Rightarrow$ Bewering C is waar.

12

3) Laat $B = \{1, x\}$ dan is

$A_B^B = \left( A(1)_B \;\; A(x)_B \right) = \begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix} = M$

e.w: $\begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(5-\lambda)+2 = 40-8\lambda-5\lambda+\lambda^2+2$

$= \lambda^2-13\lambda+42 = (\lambda-6)(\lambda-7)$

Dus $\lambda_1=6$ en $\lambda_2=7$.

e.v. $\lambda_1=6$: $\text{nul}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \text{nul}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R} \right\}$

kies $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e.v. $\lambda_2=7$: $\text{nul}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \text{nul}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R} \right\}$

kies $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ Laat $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$ en $E = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Dan geldt: $\underset{M}{M_E^E} = \underset{S}{I_E^B}\, \underset{D}{M_B^B}\, \underset{S^{-1}}{I_B^E}$ $\quad$ met $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix}8 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

$M = S\, D\, S^{-1}$

Dan geldt $\quad M^{100} = (SDS^{-1})^{100} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^{100} & 0\\ 0 & 7^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}6^{100} & 7^{100}\\ 2\,6^{100} & 7^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 7^{100}-6^{100} & -7^{100}+6^{100}\\ 2\cdot 7^{100}-2\cdot 6^{100} & -7^{100}+2\,6^{100}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ bewering B is waar.

Opm.: - als je $\lambda_1$ en $\lambda_2$ omdraait krijg je uiteraard hetzelfde.
- als je $t\bar{v}_1$ en $s\bar{v}_2$ kiest wordt de berekening iets lastiger maar nog steeds goed te doen.

15

## Opgave 4

We doorlopen de volgende stappen:

1) Bepaal een basis van $W$ : $\bar{v}_1, \bar{v}_2$
2) Orthonormaliseer de basis
3) Bereken $P_W(\bar{v})$

Stap 1) Een basis $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ van $W$ kunnen we direct aflezen: kies $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Stap 2) Laat $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ en $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle}{\langle \bar{w}_1, \bar{w}_1 \rangle} \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dus $\|\bar{w}_1\| = \sqrt{2}$

$\|\bar{w}_2\| = \sqrt{3}$

Dus $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ is een orthonormale basis van $W$.

Stap 3) $P_W(\bar{v}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{6} - \frac{8}{6} \\ -\frac{9}{6} - \frac{8}{6} \\ 0 + \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{17}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix}$$

## Opgave 5:

a) Waar.

6 Bewijs: laat $\bar{v} \in V$ willekeurig.

Volgens stelling 9.3.1 bestaat er een unieke $\bar{w} \in W$ zodat

$$\bar{v} = \bar{w} + (\bar{v} - \bar{w}) \quad \text{en} \quad \bar{v} - \bar{w} \in W^{\perp}$$

Omdat $\bar{w} \in W$ zijn er unieke $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ zodat

$$\bar{w} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_m \bar{e}_m$$

Omdat $\bar{v} - \bar{w} \in W^{\perp}$ zijn er unieke $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ zodat

$$\bar{v} - \bar{w} = \mu_1 \bar{f}_1 + \dots + \mu_n \bar{f}_n$$

Dus $\bar{v}$ is uniek te schrijven als

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_m \bar{e}_m + \mu_1 \bar{f}_1 + \dots + \mu_n \bar{f}_n$$

Dit bewijst dat $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ een basis is.

De basis is orthonormaal want $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ hebben allemaal lengte één en voor iedere $\bar{x}, \bar{y} \in B$ verschillend geldt $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ want als:

1) $\bar{x}, \bar{y} \in W$ dan is $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ want $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ is orthonormaal
2) $\bar{x}, \bar{y} \in W^{\perp}$ dan $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ want $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ is orthonormaal
3) $\bar{x} \in W$, $\bar{y} \in W^{\perp}$ dan is $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ (per definitie van $W^{\perp}$)

waar:

7 b) Volgens stelling 9.3.2 is de afbeelding $P_W(\bar{v})$ symmetrisch. Uit stelling 10.1.3 volgt dan dat $P_W(\bar{v})$ diagonaliseerbaar is.

Alternatief: Volgens stelling heeft iedere vectorruimte met inproduct een orthonormale basis.
Laat $E_W$ een orthonormale basis zijn van $W$
en $E_{W^{\perp}}$ " " " $W^{\perp}$
Dan is volgens a) $\underbrace{E_W}_{\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m\}} \cup \underbrace{E_{W^{\perp}}}_{\{\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n\}}$ een orthonormale basis van $V$. Noem deze basis $E$, dan geldt

$$P_{W\,E}^{\;E} = \left( P_W(\bar{e}_1)_E \; \cdots \; P_W(\bar{e}_m)_E \; P_W(\bar{f}_1)_E \; \cdots \; P_W(\bar{f}_n)_E \right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{m^e \text{ plek}} \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{want } P_W = id \text{ op } W.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\text{want } W^{\perp} = \ker(P_W)}$$

Dus $(P_W)_E^E$ is diagonaal.

7 c) Onwaar:

Stel $\lambda_1, \lambda_2$ zijn de eigenwaarden van $A$

dus $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

met $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Vullen we $\lambda = 0$ in dan volgt $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$

Dus $6 = \lambda_1 \lambda_2 = 2\lambda_2$

Dus $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 3$.

De eigenwaarden zijn verschillend, dus $A$ is diagonaliseerbaar.