Tentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Maandag 30 januari 2023 13.30-16.30 (17.00 voor studenten met recht op extra tijd)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is bij je tentamen gebruiken. Het gebruik van andere bronnen of hulpmiddelen is NIET toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 25 punten
  - opgave 2: 10 punten
  - opgave 3: 30 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1

(*25 punten*) Laat $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ en M_{nn} de vectorruimte zijn van $n \times n$ matrices.

(a). (*5 punten*) Laat zien dat $\mathrm{Sym}(n)$, de deelverzameling van M_{nn} van symmetrische matrices, een lineaire deelruimte is van M_{nn}.

(b). (*5 punten*) Geef een basis voor $\mathrm{Sym}(3)$.

(c). (*5 punten*) Wat is de dimensie van $\mathrm{Sym}(3)$?

(d). (*5 punten*) Bedenk een lineaire afbeelding $L : M_{nn} \to M_{nn}$, zodat de kern van L gelijk is aan $\mathrm{Sym}(n)$. NB: Vergeet niet te bewijzen dat je afbeelding inderdaad lineair is.

(e). (*5 punten*) Is de afbeelding L die je in het vorige onderdeel hebt gegeven surjectief?

Opgave 2

(*10 punten*) De afbeelding $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ wordt gedefinieerd door

$$L(f) = f'' - 4f' + 13f.$$

Geef een basis voor de kern van L in $C^\infty(\mathbb{R})$. Je mag aannemen dat de afbeelding L lineair is en dat $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 2$.

Opgave 3

(*30 punten*) Hieronder vind je drie beweringen (A t/m C) en drie afbeeldingen (1 t/m 3). Geef bij ieder van de afbeeldingen één van de uitspraken A, B en C zodat die bewering waar is voor die afbeelding, en beargumenteer waarom dit het geval is. NB: Met het begrip 'standaardbasis' wordt voor $\mathbb{R}^2$ de basis $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ bedoeld en voor $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de basis $\{1, X\}$.

Beweringen

A De afbeelding A is niet diagonaliseerbaar.

B Voor de matrixrepresentatie M van de afbeelding A ten opzichte van de standaardbasis geldt

$$M^{100} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7^{100} - 6^{100} & -7^{100} + 6^{100} \\ 2 \cdot 7^{100} - 2 \cdot 6^{100} & -7^{100} + 2 \cdot 6^{100} \end{pmatrix}.$$

C De afbeelding A is diagonaliseerbaar door middel van een coördinatentransformatie die orthogonaal is.

Afbeeldingen

1 De afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+y\\-x+y\end{pmatrix}.$$

2 De afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

3 De afbeelding $A : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ gedefinieerd door:

$$A(a + bX) = (8a - b) + (2a + 5b)X.$$

Opgave 4

(*15 punten*) Laat W het vlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$W = \{\lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Bereken de orthogonale projectie van $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ op W.

Opgave 5

(*20 punten*) Welke van de volgende beweringen zijn waar? NB: bewijs je bewering!

(a). (*6 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en laat $W \subseteq V$ een lineaire deelruimte zijn van V. Als $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}\}$ een orthonormale basis is van W en $\{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_k}\}$ een orthonormale basis is van $W^\perp$, dan is $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}, \vec{f_1}, \dots, \vec{f_k}\}$ een orthonormale basis van V.

(b). (*7 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct, $W \subseteq V$ een lineaire deelruimte van V en $P_W : V \to V$ de orthogonale projectie zijn van V op W. Dan is de afbeelding P_W diagonaliseerbaar.

(c). (*7 punten*) Er bestaat een 2×2 matrix A met tenminste één van de eigenwaarden gelijk aan 2 en determinant gelijk aan 6 die niet diagonaliseerbaar is.