Herkansing Lineaire algebra 2 (WISB108)
13 maart 2023, 17.00-20.00

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is bij je tentamen gebruiken. Het gebruik van andere bronnen of hulpmiddelen is NIET toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 15 punten
  - opgave 2: 30 punten
  - opgave 3: 10 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 30 punten

Opgave 1

(*15 punten*) De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegegeven door

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}.$$

Laat $E = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ de standaardbasis zijn van $\mathbb{R}^2$ en $B = \{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\}$ een tweede basis zijn van $\mathbb{R}^2$. Je hoeft niet te bewijzen dat B inderdaad een basis is van $\mathbb{R}^2$. Bereken A_B^B en A_E^E.

Opgave 2

(*30 punten*)

(a). (*8 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A met alle coëfficiënten van A ongelijk aan 0 en zodat A diagonaliseerbaar is. Laat zien dat je voorbeeld voldoet aan alle voorwaarden die gevraagd worden.

(b). (*7 punten*) Bereken voor deze matrix A^{100}.

(c). (*8 punten*) Laat $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ de vectorruimte zijn van polynomen van graad hoogstens één met reële coëfficiënten. Is de afbeelding $L : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ gedefinieerd door

$$L(a + bX) = (2a + b) + 2bX$$

diagonaliseerbaar?

(d). (*7 punten*) Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ met eigenwaarden die niet reëel zijn. Je hoeft niet te bewijzen dat je afbeelding lineair is, wel dat de eigenwaarden inderdaad niet reëel zijn.

Opgave 3

(*10 punten*) Vind alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 6y' + 13y = 26x + 1.$$

Opgave 4

(*15 punten*) Laat $M_{2,2}$ de lineaire ruimte zijn van 2×2 matrices met reële coëfficiënten met inproduct $\langle A, B \rangle = \text{Spoor}(AB^t)$. Laat W de lineaire deelruimte zijn opgespannen door

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken de orthogonale projectie van $X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ op W.

Opgave 5

(*30 punten*) Laat V een eindig dimensionale vectorruimte zijn met inproduct en $A : V \to V$ een lineaire afbeelding. Welke van de onderstaande beweringen zijn waar? Als de bewering waar is, geef dan een bewijs van de bewering, en als de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld.

(a). (*10 punten*) Als alle eigenwaarden van A gelijk zijn aan ± 1, dan is A orthogonaal.

(b). (*10 punten*) Als W een lineaire deelruimte is van V en P_W de orthogonale projectieafbeelding is van V op W dan geldt:

$$\text{Ker}(P_W) = W^\perp.$$

(c). (*10 punten*) Als W een lineaire deelruimte is van V dan geldt

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$