WISB108 Infi 2 tentamen
Dinsdag 31 januari 2023, 13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Alle opgaven mogen in vrije volgorde op hetzelfde blad.
- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Je mag gebruik maken van een spiekbrief (met de hand enkelzijdig beschreven). De spiekbrief inleveren met je werk.
- Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 28 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. De kromme $\mathcal{C}$ is de doorsnijding van de cylinder $x^2+y^2=4x$ en het vlak $x+z=2$. Bepaal een raakvector aan $\mathcal{C}$ in het punt $(1,\,-\sqrt{3},\,1)$. 4 pt.

Uitwerking: Het makkelijkst is om hier te kiezen om ofwel y en z uit te drukken in x, ofwel x en y in z. Indien we de eerste optie kiezen dan parametriseren we met de x-coordinaat, en krijgen $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$ en $z=2-x$. Voor y kiezen we het minteken omdat we een parametrisering nodig hebben in de buurt van $(1,\,-\sqrt{3},\,1)$. We krijgen dus de parameterisering

$$\boldsymbol{r}(t)=(t,\,-\sqrt{4t-t^2},\,2-t).$$

Het gevraagde punt $(1,\,-\sqrt{3},\,1)$ komt overeen met $t=1$; we vinden in dat punt de raakvector door uitrekenen van

$$\boldsymbol{r}'(1)=(1,\,-\tfrac{2-t}{\sqrt{4t-t^2}},\,-1)\Big|_{t=1}=(1,\,-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\,-1).$$

Aandachtspunt: let op dat het minteken in de y-coordinaat correct behandeld wordt.

Praktisch puntje: veel studenten kozen voor parametriseren met cylindercoordinaten, waarschijnlijk door het woord "cylinder" in de opgave, maar makkelijker wordt het daar niet door.

2. Integreer $\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2$ over het gebied met hoekpunten $(1,\,0)$, $(2,\,0)$, $(0,\,2)$, $(0,\,1)$. 4 pt.
Gebruik de substitutie $u=x+y$, $v=x-y$.

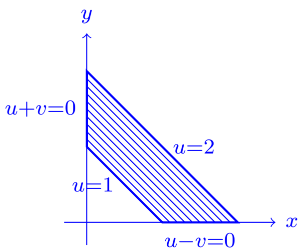
Uitwerking: Noem het integratiegebied D. Het wordt begrensd door de lijnen

$$y=0,\quad x+y=2,\quad x=0,\quad x+y=1.$$

In de nieuwe coordinaten zijn dat respectievelijk

$$u=v,\quad u=2,\quad u=-v,\quad u=1.$$

Het binnengebied van deze figuur is dus het gebied waar $1\le u\le 2$ en $-u\le v\le u$.



Voor de Jacobiaan geldt

$$\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\tfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\left(\det\begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{pmatrix}\right)^{-1}=\left(\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^{-1}=-\tfrac{1}{2}.$$

De integraal is nu

$$\int_D\left(\tfrac{x-y}{x+y}\right)^2\,\mathrm{d}(x,y)=\int_1^2\int_{-u}^{u}\tfrac{v^2}{u^2}\left|\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,\mathrm{d}v,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{6}\int_1^2\tfrac{v^3}{u^2}\Big|_{v=-u}^{v=u}\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{3}\int_1^2 u\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{6}(4-1)=\tfrac{1}{2}.$$

Aandachtspunten:

- *juiste grenzen na herparametriseren,*
- *de Jacobiaan $J=-\frac{1}{2}$, maar in de integraal nemen we $|J|=+\frac{1}{2}$.*

3. a. Bestaat er een vectorveld $\boldsymbol{F}$ op $\mathbb{R}^3$ zodanig dat $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz,\ xyz,\ zx^2)$? Geef een voorbeeld, of leg uit waarom niet. 3 pt.

Uitwerking: Indien zo'n vectorveld bestaat, moet gelden dat $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = 0$. Echter, uit de aanname dat er een $\boldsymbol{F}$ bestaat zodanig dat $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = (yz,\ xyz,\ zx^2)$, volgt $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = 0 + xz + x^2$, en dit scalaire veld is duidelijk niet identiek gelijk aan 0. We concluderen dat de gevraagde $\boldsymbol{F}$ niet bestaat.

b. Bestaat er een scalaire functie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zodanig dat $\nabla f(x, y, z) = (2xy + y^2,\ 2xy + x^2,\ 3z^2)$? Geef een voorbeeld, of leg uit waarom niet. 3 pt.

Uitwerking: Door de drie coordinaten van ∇f te integreren naar respectievelijk x, y en z vinden we de kandidaat $f(x, y, z) = x^2y + xy^2 + z^3$. Deze heeft inderdaad de juiste gradient dus hij voldoet en het antwoord is ja. *Je moet wel iets zeggen over hoe je je potentiaal gevonden hebt.*

4. Bepaal $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, indien $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, -z, y)$ en de kromme $\mathcal{C}$ geparametriseerd is met $\boldsymbol{r}(t) = (2t, 3t, -t^2)$ voor $0 \le t \le 1$. 4 pt.

Uitwerking: De afgeleide van de parametrisatie is

$$\boldsymbol{r}'(t) = (2, 3, -2t),$$

en het vectorveld uitgerekend op de geparametriseerde kromme is

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (2t, t^2, 3t).$$

Zodoende,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (2t, t^2, 3t) \cdot (2, 3, -2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 4t - 3t^2 = 2t^2 - t^3\big|_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Eenvoudige routine-opgave, dus details moeten in orde zijn.

5. Bereken $\int_{\mathcal{S}} |xy|\ \mathrm{d}S$ waarin het oppervlak $\mathcal{S}$ bestaat uit de cylinderwand $x^2 + z^2 = 1$ tussen de vlakken $y = 0$ en $y = 2$ (het gaat alleen om de wand, *zonder* de eindvlakken). 4 pt.

Uitwerking: We hebben hier een cylinder om de y-as, staal 1 en lengte 2. We kunnen deze parametriseren met

$$\Psi : (u,\ v) \mapsto (\cos u,\ v,\ \sin u),$$

waarin $(u,\ v) \in [0,\ 2\pi) \times [0,\ 2]$. Hierin uitgedrukt is de integrand

$$|xy| = v\,|\cos u|\,,$$

aangezien $v \ge 0$. We merken op dat zowel de integrand als de cylinder symmetrie om de y-as hebben. In het kwadrant $u \in [0,\ \frac{1}{2}\pi]$ geldt $\cos u \ge 0$ en vanwege de symmetrie is de integraal over dit deel van de cylinder gelijk aan de integraal over de andere drie kwadranten. Daarom zullen we alleen de integraal van $xy = v\cos u$ uitrekenen over het gebied

$$D = \{(u,\, v) \mid 0 \leq u \leq \tfrac{1}{2}\pi,\, 0 \leq v \leq 2\}.$$

Nu gaan we op zoek naar de normaalvector op het oppervlak, $\boldsymbol{n}$. De partiële afgeleiden van Ψ zijn

$$\Psi_u = (-\sin u,\, 0,\, \cos u) \quad \text{en} \quad \Psi_v = (0,\, 1,\, 0),$$

zodat we voor de normaalvector vinden

$$\boldsymbol{n} = \Psi_u \times \Psi_v = (-\cos u,\, 0\, -\sin u),$$

wat overigens ook direct uit de meetkunde geconcludeerd kan worden. Tot slot zien we dat $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Dan de integraal uitrekenen over de cylinder:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} |xy|\ \mathrm{d}S &= 4\int_D v\cos u\, |\boldsymbol{n}|\, \mathrm{d}(u,v)\\ &= 4\int_0^{\pi/2} \cos u\, \mathrm{d}u \int_0^2 v\, \mathrm{d}v = 8.\end{aligned}$$

Aandachtspunten:

- *verstandig omgaan met* $|xy|$*;*
- $|\boldsymbol{n}| = 1$ *moet expliciet berekend of beredeneerd zijn; het wordt fout gerekend om hier helemaal niets over te zeggen.*

6. Laat f en g allebei gladde functies $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zijn. We zeggen dat f en g *functioneel afhankelijk* zijn indien er een functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f(x,\, y) = h(g(x,\, y))$ voor alle $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$.

   a. Stel dat f en g functioneel afhankelijk zijn. Toon aan dat de Jacobiaan $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$ voor alle x, y. 3 pt.

   Uitwerking: Uit de aanname volgt dat er een h bestaat zoals in de definitie van afhankelijkheid; uit het gegeven dat f glad is volgt dat h differentieerbaar moet zijn. We berekenen de Jacobiaan:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h'(g)\partial_x g & h'(g)\partial_y g \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} = 0,$$

   immers de rijen van de matrix zijn lineair afhankelijk.

   b. Er bestaan functies f en g zodanig dat $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$ voor alle x, y, terwijl f en g *niet* functioneel afhankelijk zijn. Geef een voorbeeld en laat zien dat je voorbeeld voldoet. 3 pt.

   Uitwerking: Neem voor f de functie $f(x,y) = x$ en voor g de constante functie $g(x,y) = 1$. We laten eerst zien dat de Jacobiaan 0 is:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Nu laten we zien dat h niet bestaat. Stel dat h wel bestaat zodanig dat $f = h \circ g$. We gaan uit deze aanname een tegenspraak afleiden.

Beschouw het punt $(0, 0)$: hier geldt $f(0, 0)$=0 en $g(0, 0) = 1$; hieruit concluderen we dat $h(1) = 0$.

Beschouw het punt $(1, 0)$: hier geldt $f(1, 0)$=1 en $g(1, 0) = 1$; hieruit concluderen we dat $h(1) = 1$.

Dus $h(1) = 0$ en $h(1) = 1$, wat duidelijk onzin is; dus de functie h bestaat niet. Dus f en g zijn niet functioneel afhankelijk.

Aandachtspunt: streng zijn op argumentatie dat h niet bestaat.

Hier werden ver-ba-zend veel "voorbeelden" gegeven van functies f en g die ofwel niet gedefinieerd zijn op heel $\mathbb{R}^2$, ofwel overduidelijk wél functioneel afhankelijk zijn.