WISB108 Infi 2 hertentamen
Donderdag 16 maart 2023, 17:00

Aanwijzingen

- Alle opgaven mogen in vrije volgorde op hetzelfde blad.
- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Je mag gebruik maken van een spiekbrief (met de hand enkelzijdig beschreven). De spiekbrief inleveren met je werk.
- Andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 28 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Zij $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin(x^2 y)$. Bereken $\nabla f(2,0)$. 4 pt.

Uitwerking: Binnenkomertje. Als je geen fouten maakt kom je uit op $(0, 16)$. Helaas werden er toch wel feel vouten gemaakt, met name bij het correct toepassen van de kettingregel...

2. Zij f gegeven door $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$ op het domein $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Geef een parametrisering van de kromme die de niveauverzameling van $f(x,y) = -2$ is. 4 pt.

Uitwerking: Op de contour $f(x,y) = -2$ geldt $x^2 + y^2 = -2x$ mits $x \neq 0$. Nu kun je op twee manieren verder gaan (eigenlijk op veel meer, maar twee manieren liggen voor de hand).

1. Herschrijf als $y^2 = -2x - x^2 = -x(2+x)$. We weten dat: (i) kwadraten niet-negatief zijn en (ii) $y > 0$ volgens de opgave, dus we moeten (i) eisen dat $-x(2+x) > 0$ oftewel $-2 < x < 0$, en (ii) nemen de +-wortel zodat $y = \sqrt{-x(2+x)}$. We kunnen dus parametriseren met de x-coordinaat, en vinden de parametrisering $\boldsymbol{r}(t) = (t,\ \sqrt{-t(2+t)})$ op het domein $t \in (-2,\ 0)$.

2. Alternnatieve aanpak: de vergelijking $x^2 + y^2 = -2x$ is equivalent met $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Kennelijk ligt de contourlijn dus op de cirkel met straal 1 en middelpunt $(-1,\ 0)$. Hiervan het deel met $y > 0$ laat zich parametiseren d.m.v. $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + \cos t, \sin t)$ op het interval $t \in (0, \pi)$.

De meeste studenten kozen optie 1, en heel veel studenten vergaten het domein te specificeren.

3. Een kromme is geparametriseerd met 4 pt.

$$\boldsymbol{r}(t) = t\cos(2t)\hat{\mathbf{i}} + t\sin(2t)\hat{\mathbf{j}} + (1-t)\hat{\mathbf{k}},$$

voor $0 \le t \le 1$. Bereken de lengte van dat deel van de kromme.
Je mag gebruiken dat $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

Uitwerking: De booglengte vinden we met de booglengteformule $\int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \,\mathrm{d}t$. In dit geval hebben we

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos(2t) - 2t\sin(2t),\ \sin(2t) + 2t\cos(2t),\ -1).$$

De coordinaten van deze vector kwadrateren en bij elkaar optellen om $\left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\|$ te vinden, is weinig werk als we slim opmerken dat de $\sin^2$ en $\cos^2$ mooi optellen terwijl de kruistermen tegen elkaar wegvallen. We vinden dus met weinig (schrijf)werk:

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\|^2 = 1 + 4t^2 + 1 = 2 + 4t^2,$$

en zodoende

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{2 + 4t^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + 2t^2}.$$

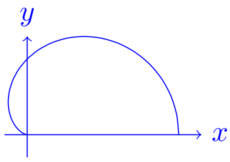
Met de substitutie $u = \sqrt{2}t$ kunnen we de hint uit de opgave gebruiken:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1+2} + \tfrac{1}{2}\log \sqrt{2} + \sqrt{1+2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{6} + \tfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Let op, sommige studenten dachten dat de hint in de opgave ook wel zou gelden met een andere integrand zoals $\sqrt{2+x^2}$, maar dat kun je dus niet zomaar aannemen!

4. Integreer y over het oppervlak in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ begrensd door de x-as en de kromme $r = 1 + \cos\theta$. 4 pt.
In de oorspronkelijke opgave stond het domein $\mathbb{R}^2$ waardoor de opgave enigszins ambigu werd; hier is bij het nakijken rekening mee gehouden. De domeinen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ en $\mathbb{R}^2$ in opgaven 2 en 4 zijn per ongeluk verwisseld!

Uitwerking:

Schets: 

Het deel van de kromme boven de x-as komt in poolcoordinaten overeen met $0 \le \theta \le \pi$; het gebied binnen de kromme wordt bestreken indien we nemen $0 \le r \le 1 + \cos\theta$. Dit nemen we als grenzen voor het integratiegebied. De integrand drukken we uit in poolcoordinaten door $y = r\sin\theta$. In poolcoordinaten hebben we bovendien de Jacobiaan r. De integraal is dus

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{3}r^3 \sin\theta\Big|_{r=0}^{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\tfrac{1}{12}(1+\cos\theta)^4\Big|_0^{\pi} = \tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$

5. Zij $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2y^2 - z^2,\ cxy,\ \frac{1}{3}z^3 - 2xz)$. Voor welke $c \in \mathbb{R}$ geldt er dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is? 4 pt.

Uitwerking: Volgens een stelling in het dictaat geldt dat indien $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ op een enkelvoudig samenhangend gebied, dan is $\boldsymbol{F}$ een conservatief vectorveld op $\mathbb{R}^3$. In deze opgave hebben we een $\boldsymbol{F}$ die op heel $\mathbb{R}^3$ goed gedefinieerd is, en $\mathbb{R}^3$ is enkelvoudig samenhangend. We hoeven dus alleen te zorgen dat $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ om af te dwingen dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is. Een kleine berekening laat zien dat $\nabla \times \boldsymbol{F} = (0, 0, cy - 4y)$. We lezen af dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is precies dan als $c = 4$.

Een aantal studenten kiest een andere weg, namelijk direct uitrekenen van de potentiaal van $\boldsymbol{F}$. Je vindt dan ook makkelijk $c = 4$ maar het is dan veel moeilijker om te bewijzen dat het de enige optie is.

6. Bereken de flux van het vectorveld $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2y,\ -10xy^2,\ 0)$ door het oppervlak $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $z = xy$ voor x, y in de rechthoek $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$. 4 pt.

Uitwerking: Het oppervlak $\mathcal{S}$ is gegeven in de vorm $z = xy$, de z-coordinaat is dus een functie van x en y. Dit betekent dat we als normaalvectoren kunnen nemen

$$\boldsymbol{n} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z, y}{\partial,} 1) = (-y, -x, 1),$$

waarbij we de orientatie in de richting van de positieve z-as hebben gekozen. Het integratiegebied kunnen we parametriseren met $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, de flux is dus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_0^2 \int_0^1 (x^2y, -10xy^2, 0) \cdot (-y, -x, 1)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \int_0^1 9x^2y^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 3x^2y^3\big|_0^1\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 3x^2\, \mathrm{d}x = 8.
\end{aligned}$$

7. Gegeven is een functie $k \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Voor functies $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiëren we een nieuwe functie K_f als volgt: 4 pt.

$$K_f(x) = \int_0^x k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Merk op dat K_f zelf een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is. Indien we deze voor het gemak g noemen, dus $K_f = g$, dan kunnen we vervolgens definiëren:

$$K_f^2(x) = K_g(x).$$

Er blijkt te gelden:

$$K_f^2(x) = \int_0^x \int_y^x \ldots\ldots f(y)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y.$$

Zoek uit wat er op de stippels moet staan en leg uit waarom.

Uitwerking: Let op: sommigen lazen K_f^2 als het kwadraat van K_f, terwijl er pal boven stond dat we K_f^2 definiëren als K_g. Om de definitie goed toe te passen schrijven we eerst nogmaals

$$g(x) = K_f(x) = \int_0^x k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Voor het vervolg is het belangrijk om je te realiseren dat y hierin een soort dummy-variabele is, die alleen gebruikt wordt om over te integreren. De naam y is willekeurig gekozen, we hadden ook z kunnen nemen of α of p, als er maar geen verwarring kan ontstaan met andere variabelen. En die verwarring ligt hier wel op de loer, immers per definitie hebben we:

$$K_f^2(x) = K_g(x) = \int_0^x k(x, y) g(y)\, \mathrm{d}y,$$

waarin ook al de dummy-variabele y gebruikt is! Om verwarring te voorkomen zullen we in de formule voor K_f^2 een andere integratievariabele moeten kiezen, zoals z:

$$K_f^2(x) = K_g(x) = \int_0^x k(x, z) g(z)\, \mathrm{d}z.$$

Vervolgens kunnen we de definitie van g invullen:

$$K_f^2(x) = \int_0^x k(x,z) \int_0^z k(z,y) f(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

Aangezien $k(x,z)$ onafhankelijk is van y kunnen we deze factor binnen de binnenste integraal halen, en daarna verwisseling van integratievolgorde toepassen:

$$\begin{aligned} K_f^2(x) &= \int_0^x \int_0^z k(x,z)k(z,y)f(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^x \int_y^x k(x,z)k(z,y)f(y) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

We concluderen dat op de stippels moet staan $k(x,z)k(z,y)$.