Opgave 1.

Er geldt $(z+\bar{z}+1)(z^3-1)=0 \Leftrightarrow$

$z+\bar{z}+1=0$ of $z^3-1=0$.

1). Bekijk $z+\bar{z}+1=0$: Stel $z=a+bi$ dan geldt:

$z+\bar{z}+1=a+bi+a-bi+1=2a+1=0 \Leftrightarrow a=-\tfrac{1}{2}$.

2) Bekijk $z^3-1=0$: Stel $z=re^{i\varphi}$ dan zoeken we $r\geq 0$ en $-\pi<\varphi\leq\pi$ zodat:

$(re^{i\varphi})^3=r^3e^{i3\varphi}=1$. Dus:

a) $r^3=1$ en hieruit volgt $r=1$

b) $3\varphi=0+2k\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$ en hieruit volgt $\varphi=\frac{2}{3}k\pi$ en we vinden:

$\varphi_1=0 \quad (k=0)$

$\varphi_2=\frac{2}{3}\pi \quad (k=1)$

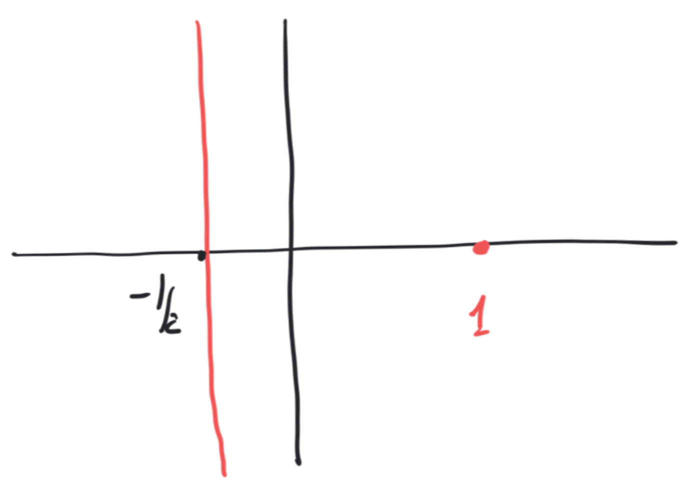
$\varphi_3=\frac{4}{3}\pi \quad (k=2)$

(voor overige $k\in\mathbb{Z}$ vind je dezelfde oplossingen want z^3-1 heeft graad 3)

Uit 1) en 2) vinden we als oplossingsverzameling:

$$\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)=-\tfrac{1}{2}\}\cup\{1,e^{\frac{2}{3}\pi i},e^{\frac{4}{3}\pi i}\}=\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)=-\tfrac{1}{2}\}\cup\{1\}$$

In het complexe vlak:



Want:

$e^{\frac{2}{3}\pi i}=\cos(\tfrac{2}{3}\pi)+i\sin(\tfrac{2}{3}\pi)$
$=-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$e^{\frac{4}{3}\pi i}=-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

dus $Re(e^{\frac{2}{3}\pi i})=Re(e^{\frac{4}{3}\pi i})=-\tfrac{1}{2}$.

Opgave 2.

a) l snijdt W loodrecht, dus de normaal vector $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ is een richtingsvector voor l. We kiezen als steunvector $p = \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}$ dus l heeft parametrisatie:

$$l: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}$$

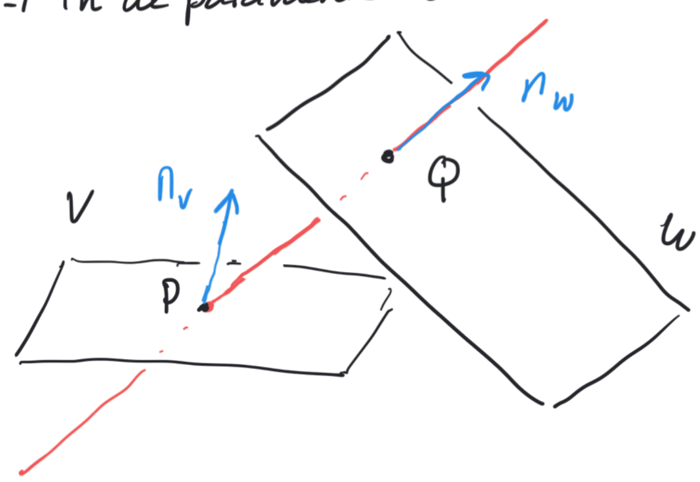
b) We berekenen voor welke λ l op W ligt:

$$(1+\lambda) + 2(6+2\lambda) + 2(2\lambda) = 13 + 9\lambda = 4$$

$$\Longleftrightarrow 9\lambda = -9 \Longleftrightarrow \lambda = -1.$$

Dus Q heeft coördinaten $Q = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$

(vul $\lambda = -1$ in de parametrisatie van l)



c) Want $n_v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ een normaal vector bij van V.

We berekenen de hoek tussen n_v en l. Deze wordt gegeven door

$$\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|}\right) =$$

$$\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Dus l snijdt V ook onder een hoek van

$$\pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

Opgave 3.

a) We passen G.J toe op de matrix met $\vec{v}_1,..\vec{v}_4$ in de kolommen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & a(a-1) & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3\to r_3+r_1 \\ r_4\to r_4-r_1 \\ r_5\to r_5+4r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a(a-1) & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_4\to r_4-r_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a(a-1) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_5\to r_5+2r_4}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{a(a-1)} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{}$ zijn pivot-elemente als $a \neq 1$ e $a \neq 0$)

We concluderen dat:

1) als $a \neq 1$ en $a \neq 0$ dan heeft de rijgereduceerde matrix vier pivotelementen, dus de vier vectoren $\vec{v}_1,..\vec{v}_4$ zijn onafhankelijk en vormen een basis voor $\text{Span}(\vec{v}_1,..\vec{v}_4)$, en dus $\dim(\text{span}(\vec{v}_1,..\vec{v}_4)) = 4$.

2) als $a=1$ dan is de rijgereduceerde matrix: ($\boxed{}$ zijn pivotelementen)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dus $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ is een basis voor $\text{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$ en $\dim(\text{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)) = 3$.

3) als $a=0$ dan is de rijgereduceerde matrix:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($\boxed{}$ zijn pivotelementen)

dus $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ is een basis voor $\text{Span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$ en $\dim(\text{span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)) = 3$.

b) $\vec{w} \in \text{Span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4) \Leftrightarrow \vec{w} \in \text{Span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_4)$ (zie a)

$\Leftrightarrow$ er zijn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ zodat $\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_4\vec{v}_4$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \vec{w}$

We passen G.J. toe: (zie a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3\to r_3+r_1 \\ r_4\to r_4-r_1 \\ r_5\to r_5+4r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{r_5\to r_5-2r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

We zien dat het stelsel strijdig is, want $0x_1+0x_2+0x_4 = -8$ heeft geen oplossing

dus $\vec{w} \notin \text{Span}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$.

c) Uit a) volgt dat de rijgereduceerde matrix voor $a=0$ gelijk is aan:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dus $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Nul}(A)$

$\Leftrightarrow$ $x_4 = 0$
$x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$
$x_2 = t$
$x_1 = -t$

dus $\text{Nul}(A) = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Dus $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ is een basis voor $\text{Nul}(A)$

Opgave 4

We berekenen de determinant door rij/kolom-operaties toe te passen:

$$\begin{vmatrix} x-a & b & c & d \\ x-a & x & 2c & 2d \\ x-a & x & x+c & 3d \\ x-a & x & x+c & x+2d \end{vmatrix} \underset{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}}{=} \begin{vmatrix} x-a & b & c & d \\ 0 & x-b & c & d \\ 0 & x-b & x & 2d \\ 0 & x-b & x & x+d \end{vmatrix} \underset{\substack{r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}}{=} \begin{vmatrix} x-a & b & c & d \\ 0 & x-b & c & d \\ 0 & 0 & x-c & d \\ 0 & 0 & x-c & x \end{vmatrix} \underset{r_4 \to r_4 - r_3}{=} \begin{vmatrix} x-a & b & c & d \\ 0 & x-b & c & d \\ 0 & 0 & x-c & d \\ 0 & 0 & 0 & x-d \end{vmatrix} =$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

B is inverteerbaar $\iff \det(B) \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b,c,d\}$.

Opgave 5

a) De bewering is onwaar:

als $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4$ dan geeft dit in
$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4$

matrix notatie $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}\right)$ en dus zijn er

hoogstens 2 pivotelementen, dus het stelsel is strijdig of heeft oneindig veel oplossingen.

Meetkundig: De oplossingsverzameling van twee lineaire vergelijkingen in drie variabelen wordt gegeven door de doorsnede van twee vlakken in $\mathbb{R}^3$, dus die is leeg of wordt gegeven door een lijn.

b) De bewering is onwaar: kies $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dan geldt $\det(A+B) = 1$ en $\det(A) = \det(B) = 0$

dus $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

c) De bewering is onwaar: kies $\vec{a} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan

geldt: $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq 0$ en $\vec{b} \neq 0$ maar

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$

Meetkundig: de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{a}$ is 0.

d) De bewering is waar. Bewijs:

Stel $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft oneindig veel oplossingen, dus $\dim(\mathrm{Nul}(A)) \geq 1$. Dan is $\mathrm{rang}(A) = n - \dim(\mathrm{Nul}(A)) < n$.

Dus A is niet inverteerbaar, dus $\det(A) = 0$.

Dan volgt dat $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$.

Dus AB is ook niet inverteerbaar, dus $\mathrm{rang}(AB) < n$

$\dim(\mathrm{Nul}(AB)) = n - \mathrm{rang}(AB) \geq 1$.

Dus $AB\vec{x} = \vec{0}$ heeft oneindig veel oplossingen.