Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Donderdag 10 november 2022, 9.00-12.00
(extra tijd-studenten tot 12.30)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is bij je tentamen gebruiken. Het gebruik van het dictaat, collegeaantekeningen, telefoons, computers, rekenmachines of andere bronnen is NIET toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 10 punten
  - opgave 2: 15 punten
  - opgave 3: 35 punten
  - opgave 4: 10 punten
  - opgave 5: 30 punten

SCHRIJF IEDERE OPGAVE GRAAG OP EEN APART VEL

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Vind alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan de volgende vergelijking en geef een plaatje van de oplossingen in het complexe vlak:

$$(z + \overline{z} + 1)(z^3 - 1) = 0.$$

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(*15 punten*) Laat V het vlak in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door $x_1 + x_2 = 7$ en W het vlak gegeven door $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$.

(a). (*4 punten*) Geef een parametrisatie van de lijn l door het punt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ op V die het vlak W loodrecht snijdt.

(b). (*4 punten*) Wat zijn de coördinaten van het snijpunt Q van l met W?

(c). (*7 punten*) Onder welke hoek snijdt l het vlak V?

Opgave 3 (nieuw vel papier)

(*35 punten*) Laat $a \in \mathbb{R}$. Gegeven zijn de vier vectoren in $\mathbb{R}^5$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ -1 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a(a-1) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a). (*12 punten*) Bepaal voor elke waarde van a de dimensie en een basis van $\mathrm{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$.

(b). (*12 punten*) Stel $a = 0$ en laat $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Is $\mathrm{Span}(\mathbf{w}) \subseteq \mathrm{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$?

(c). (*11 punten*) Geef een basis voor de nulruimte van

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

NB: dit is de matrix met in de kolommen de vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$ voor $a = 0$. Je mag bij de beantwoording uiteraard je berekeningen uit (a) gebruiken.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Gegeven zijn getallen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$. Bereken de determinant van de onderstaande matrix B (uitgedrukt in a, b, c, d en x) en ga na voor welke waarde(n) van x de matrix B inverteerbaar is:

$$B = \begin{pmatrix} x-a & b & c & d \\ x-a & x & 2c & 2d \\ x-a & x & x+c & 3d \\ x-a & x & x+c & x+2d \end{pmatrix}.$$

Opgave 5 (nieuw vel papier)

(*30 punten*) De volgende beweringen zijn waar of onwaar. Bewijs of weerleg de beweringen:

(a). (*5 punten*) Er bestaan stelsels van twee vergelijkingen in drie onbekenden met een unieke oplossing.

(b). (*5 punten*) Gegeven zijn $n \times n$ matrices A en B. Er geldt: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(c). (*10 punten*) Gegeven zijn $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. Er geldt voor het uitproduct tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \text{ dan en slechts dan als } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ of } \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

(d). (*10 punten*) Gegeven zijn $n \times n$ matrices A en B. Als het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oneindig veel oplossingen heeft, dan heeft het stelsel $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ook oneindig veel oplossingen.