Opgave 1 (10 punten)

$$(e^z-1)(z^4-1)=0 \iff$$

1) $e^z-1=0$ en
2) $z^4-1=0$

Uitwerking van 1: noem $z=a+bi$ dan geldt:

$$e^z-1=0 \iff e^z=1 \iff e^{a+bi}=1 \iff$$

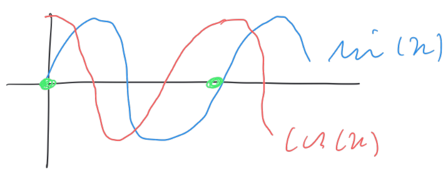
$$e^a(\cos(b)+i\sin(b))=1.$$

Uit de laatste vergelijking volgt (neem lijke lengte)

dat $e^a=1$ en dus $a=0$

en $\cos(b)+i\sin(b)=1$ dus

$\sin(b)=0$ en $\cos(b)=1$.



en dus $b=2k\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$.

Uitwerking van 2: neem $z=re^{i\varphi}$ dan geldt

$r^4e^{i4\varphi}=1$ dus (neem lijke lengte en argument)

a) $r^4=|r^4e^{i\varphi}|=1$ dus $r=1$

b) $\arg(r^4e^{i4\varphi})=4\varphi=0+2k\pi$ met $k\in\mathbb{Z}$, en dus

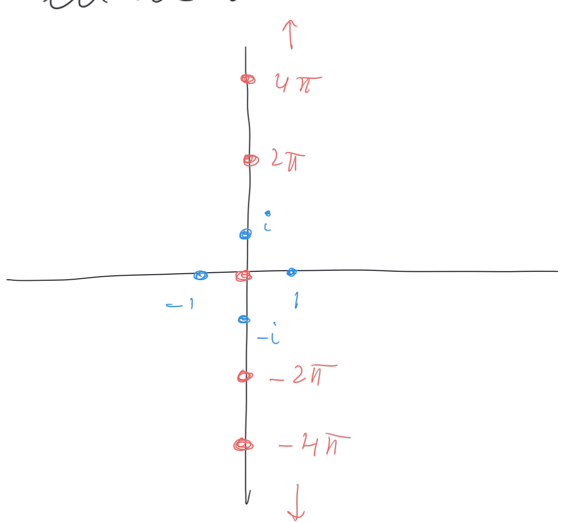
$\varphi=\frac{k\pi}{2}$ met $k\in\mathbb{Z}$ en we vinden:

$\varphi_0=0$

$\varphi_1=\frac{\pi}{2}$

$\varphi_3=\pi$

$\varphi_4=\frac{3\pi}{2}$



Opgave 2.

(20 punten)

$$V: x_1 - 2x_2 - x_3 = 12.$$

$$l: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

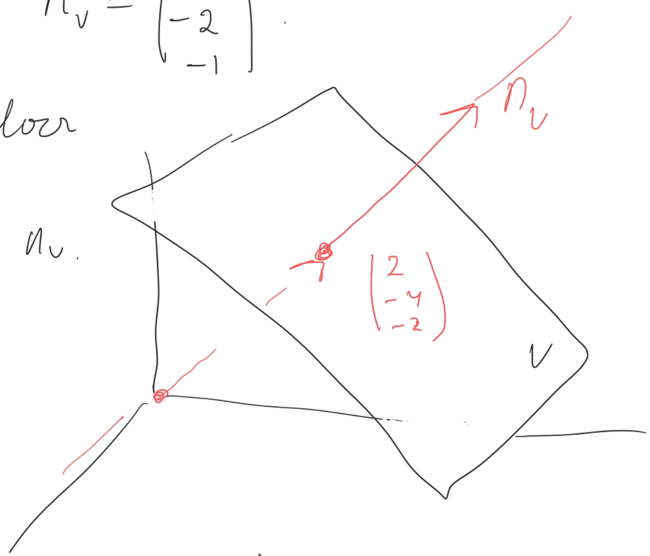
a) We vullen de coördinaten van l in de vergelijking van V in:

$$(1+5\lambda) - 2(-1-3\lambda) - (-9+11\lambda) = 1+2+9+5\lambda+6\lambda-11\lambda = 12$$

dus alle punten van l liggen op $V \Rightarrow$ bewering 2 is waar. (en 1 en 3 zijn dus niet waar)

b) V heeft als normaalvector $n_v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bekijk $\lambda n_v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, de lijn door $\vec{0}$ met richting n_v.



en bereken het snijpunt van λn_v met V:

$$\lambda - 2(-2\lambda) - (-\lambda) = \lambda + 4\lambda + \lambda = 6\lambda = 12$$

dus $\lambda = 2$

dus λn_v snijdt V in $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dus de afstand van V tot $\vec{0}$ is $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

(35 punten) **Opgave 3.** Gegeven

$$x_1+2x_2+3x_3+5x_4=b_1$$
$$2x_1+4x_2+8x_3+12x_4=b_2$$
$$3x_1+6x_2+7x_3+13x_4=b_3$$

a)
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&4&8&12\\3&6&7&13\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

b) Gebruik G.J. op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&b_1\\2&4&8&12&b_2\\3&6&7&13&b_3\end{array}\right)\overset{\substack{r_3\to r_3-3r_1\\ r_2\to r_2-2r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&b_1\\0&0&2&2&b_2-2b_1\\0&0&-2&-2&b_3-3b_1\end{array}\right)\overset{r_3\to r_3+r_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\boxed{1}&2&3&5&b_1\\0&0&\boxed{2}&2&b_2-2b_1\\0&0&0&0&b_3+b_2-5b_1\end{array}\right)\qquad \boxed{}\ \text{pivotelementen.}$$

dus het stelsel heeft oplossingen precies dan als

$$\boxed{b_3+b_2-5b_1\neq 0}$$

c) We vinden pivotelement in kolom 1 en kolom 3, dus

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}\right\}$ is een basis voor de kolommenruimte.

d) Gebruik de rijgereduceerde matrix uit a:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ dan vinden we

$$\mathrm{Nul}(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2s-2t\\s\\-t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Dus een basis van Nul(A) wordt gegeven door $B=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

e) Gebruik a) $b_1=0$, $b_2=6$, $b_3=-6$ geldt

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&0\\0&0&2&2&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\(b_2-2b_1)\\(b_3+b_2-5b_1)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&5&0\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&2&-9\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

is gelijk aan $\left\{\begin{pmatrix}-9-2s-2t\\s\\3-t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}=$

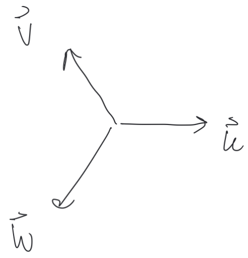
$$\left\{\begin{pmatrix}-9\\0\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ t,s\in\mathbb{R}\right\}.$$

Opgave 4 (15 punten).

a) Er geldt $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\varphi)$ met φ de hoek tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

(waar)

dus $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ betekent $\cos(\varphi)<0$ dus $\pi/2 < \varphi \leq \pi$



kies $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{dus is } \left.\begin{aligned} &\vec{u}\cdot\vec{v} = -1/2 < 0 \\ &\vec{v}\cdot\vec{w} = 1/4 - 1 = -3/4 < 0 \\ &\vec{w}\cdot\vec{u} = -1/2 < 0 \end{aligned}\right\} \text{ dus de bewering is waar.}$$

b) A $m\times n$ en $\text{rang}(A)=d$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

(waar)

1) Er geldt $\text{span}(\text{kolommen v. } A) \subseteq \mathbb{R}^m$

dus $\text{rang}(A) = \dim(\text{span}(\text{kolommen v. } A)) \leq m$

2) Uit de dimensie stelling volgt:

$$n = \text{rang}(A) + \underbrace{\dim(\text{Nul}(A))}_{\geq 0} \text{ dus}$$

$$\text{rang}(A) = n - \dim(\text{Nul}(A)) \leq n.$$

Dus de bewering is waar.

c) A en B allebei rang n $\Leftrightarrow$ A en B zijn inverteerbaar

(waar)

$\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ en $\det(B)\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ AB is inverteerbaar.

Opgave 5 (20 punten)

a) De drie vectoren van B vormen een basis als de matrix met de vectoren in de kolommen rang 3 heeft.

We berekenen die rang met G.J:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 \\ -1 & -a & -1 \\ 3 & 8a & a+8 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2 \to r_2 + r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 2a & a+2 \end{pmatrix} \underset{r_3 \to r_3 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Dus B is een basis voor $\mathbb{R}^3 \iff a \neq 0$ want alleen dan heeft de matrix 3 pivotelementen.

b) We laten zien dat de drie vectoren van B' onafhankelijk zijn. Stel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

zodat $\lambda_1(\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3) + \lambda_2(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \beta_3\vec{b}_3)$

$+ \lambda_3(\gamma_1\vec{b}_1 + \gamma_2\vec{b}_2 + \gamma_3\vec{b}_3) = \vec{0}$ (*). We laten zien dat dan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(*) is equivalent aan:

$$(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1 + \lambda_3\gamma_1)\vec{b}_1 + (\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\gamma_2)\vec{b}_2 +$$

$$(\lambda_1\alpha_3 + \lambda_2\beta_3 + \lambda_3\gamma_3)\vec{b}_3 = \vec{0}$$

Omdat B een basis is geldt dan

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1 + \lambda_3\gamma_1 = 0$$
$$\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\gamma_2 = 0$$
$$\lambda_1\alpha_3 + \lambda_2\beta_3 + \lambda_3\gamma_3 = 0$$

en dus

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Omdat de matrix M inverteerbaar is geldt dan dat

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dus de drie vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn

onafhankelijk. Omdat $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ vormen ze

dus een basis voor $\mathbb{R}^3$.