Hertentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Donderdag 22 december 2022, 17.00-20.00
(extra tijd-studenten tot 20.30)

Docent: *Barbara van den Berg*

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Je mag één A4 dat aan één kant beschreven is bij je tentamen gebruiken. Het gebruik van andere hulpbronnen is NIET toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 10 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 35 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1

(*10 punten*) Vind alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan de volgende vergelijking en geef een plaatje van de oplossingen in het complexe vlak: $(e^z - 1)(z^4 - 1) = 0$.

Opgave 2

(*20 punten*) Laat V het vlak in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door $x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$

(a). (*10 punten*) Laat l de lijn zijn gegeven door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ met } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Welke van de onderstaande drie beweringen is waar? Bewijs je antwoord.

1. De lijn l snijdt V loodrecht.
2. De lijn l ligt op V.
3. De lijn l is parallel aan V en heeft geen gemeenschappelijk punt met V.

(b). (*10 punten*) Bereken de afstand van V tot de oorsprong $\vec{0}$.

Opgave 3

(*35 punten*) Laat $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Gegeven is het lineaire stelsel:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

(a). (*2 punten*) Schrijf het stelsel in de vorm $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b). (*10 punten*) Aan welke voorwaarde(n) (vergelijking en/of ongelijkheid) moeten de coördinaten b_1, b_2 en b_3 van $\vec{b}$ voldoen zodat het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ oplossingen heeft?

(c). (*5 punten*) Geef een basis voor de kolommenruimte van A.

(d). (*10 punten*) Geef een basis voor de nulruimte van A.

(e). (*8* punten) Geef de oplossingsverzameling van $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

(*15 punten*) De volgende beweringen zijn waar of onwaar. Bewijs of weerleg de beweringen:

(a). (*5 punten*) Er bestaan vectoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ zodat voor het inproduct tussen deze vectoren geldt $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ en $\vec{u} \cdot \vec{w} < 0$.

(b). (*5 punten*) Laat A een $m \times n$ matrix zijn en geef de dimensie van de kolommenruimte van A aan met d. Dan geldt $d \leq n$ en $d \leq m$.

(c). (*5 punten*) Gegeven zijn twee $n \times n$ matrices A en B. Dan geldt: A en B hebben allebei rang n dan en slechts dan als AB inverteerbaar is.

Opgave 5

(*20 punten*)

(a). (*10 punten*) Bepaal alle waarde(n) van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2a \\ -a \\ 8a \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a+8 \end{pmatrix} \}$$

een basis is voor $\mathbb{R}^3$.

(b). (*10 punten*) Gegeven is een basis $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ van $\mathbb{R}^3$ en getallen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat als

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is, dan is

$$B' = \{\alpha_1\vec{b_1} + \alpha_2\vec{b_2} + \alpha_3\vec{b_3}, \beta_1\vec{b_1} + \beta_2\vec{b_2} + \beta_3\vec{b_3}, \gamma_1\vec{b_1} + \gamma_2\vec{b_2} + \gamma_3\vec{b_3}\}$$

ook een basis van $\mathbb{R}^3$. Licht in je bewijs duidelijk toe hoe de stappen volgen uit de definities of stellingen die je gebruikt.