WISB107 Infi 1 tentamen maandag 7 nov 2022, 17–20 uur

Aanwijzingen

- ALLE OPGAVEN MOGEN IN VRIJE VOLGORDE OP HETZELFDE BLAD.
- Geef altijd een duidelijke uitwerking met voldoende tekst-uitleg. Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout, en alleen formules meestal ook.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Je kunt alle (deel)vragen onafhankelijk van elkaar maken, ook als een eerdere (deel)vraag niet gelukt is.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Notatie: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 36 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

THUIS:

AUB CARACAL INVULLEN !

Cijferberekening: zij n het aantal punten, dan is je tentamencijfer T gelijk aan $T = 1 + \frac{9n}{36}$.

1. Factoriseer de veelterm $4x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 16x$. 4 pt.

   Uitwerking: Een mogelijke aanpak: herken de factor $4x$, daarna blijft er over $x^3 - x^2 - 4x + 4$. Hierin zou je kunnen herkennen

$$\begin{aligned} 4x(x^3 - x^2 - 4x + 4) &= 4x\left((x^3 - 4x) - (x^2 - 4)\right) \\ &= 4x\left(x(x^2 - 4) - (x^2 - 4)\right) \\ &= 4x(x-1)(x^2-4) \\ &= 4x(x-1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

   Wat ook kan, is door gokken de nulpunten 0, 1, 2 en -2 vinden en daaruit met behulp van de factorstelling de conclusie trekken dat x, $x-1$, $x-2$ en $x+2$ factoren zijn.

   Deze opgave was bedoeld als een makkelijk inkomertje. Helaas is "factoriseren" voor veel studenten een onbekend woord. Dit was behandeld in het eerste college en kwam ook voor in de webwork-basis-ophaal-opgaven. In het tweede college is die factoriseer-opgave van webwork besproken. Het begrip komt ook een aantal keren voor in het dictaat en ik heb na die eerste twee weken niemand horen vragen wat het betekent.

2. De functie f is op een zo groot mogelijk domein in $\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \log(1 - \sqrt{1-x}) + \log(1 + \sqrt{1-x}).$$

   a. Bepaal een zo groot mogelijk domein van f. 2 pt.

   Uitwerking: We moeten ervoor zorgen dat $\sqrt{1-x}$ bestaat en dat de beide logaritmen bestaan.
   De wortel $\sqrt{1-x}$ bestaat als $1 - x \geq 0$ oftewel $x \leq 1$.
   Dan is vanzelf $1 + \sqrt{1-x} > 0$ zodat diens logaritme bestaat.
   Ook moet vanwege log gelden dat $1 - \sqrt{1-x} > 0$ oftewel $\sqrt{1-x} < 1$, dus $x > 0$.
   Het domein van f is dus $(0, 1]$.

   b. Bepaal het functievoorschrift van de inverse functie f^{inv}. (Je hoeft NIET aan te tonen dat f inverteerbaar is.) 2 pt.

   Uitwerking: De som van de logs is het product van hun argumenten, en in het product herkennen we een merkwaardig product:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 - \sqrt{1-x}) + \log(1 + \sqrt{1-x}) \\ &= \log(1 - (1 - x)) \\ &= \log x. \end{aligned}$$

   Het functievoorschrift van de inverse is dus simpelweg: $f^{\text{inv}}(x) = e^x$.
   Uiteraard is de vereenvoudiging alleen geldig op het domein van f!

c. Bepaal het domein van de inverse functie f^{inv}. 2 pt.

Uitwerking: We weten dat het domein van f^{inv} gelijk is aan het bereik van f. We weten ook dat $f(x) = \log x$ met domein $(0, 1]$. Op dit domein heeft de (continue en stijgende) functie f als bereik $(-\infty, 0]$. Het domein van f^{inv} is dus $(-\infty, 0]$.

3. Onderzoek of $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\cos(\pi x))}{\log(\log x)}$ bestaat, en bepaal indien mogelijk de waarde. Geef een goede argumentatie! 4 pt.

Uitwerking: We weten dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $-1 \leq \cos t \leq 1$; in het bijzonder geldt dit ook voor $t = \cos(\pi x)$. Dus we kunnen de teller afschatten:

$$-1 \leq \cos(\cos(\pi x)) \leq 1.$$

(ja die afschatting kan scherper, maar dit is voldoende!) Verder weten we dat $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ en dus ook $\lim_{x\to\infty} \log\log x = \infty$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\log\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log\log x} = 0.$$

Uit de insluitstelling volgt nu dat ook $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\cos(\pi x))}{\log(\log x)} = 0$, en de limiet bestaat dus.

Indien insluitstelling gebruikt wordt, moet die genoemd worden.

Een typische veelgemaakte fout is dat studenten de correcte afschatting $-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1$ *maken, maar vervolgens foutief denken dat* $\cos(-1) \leq \cos(\cos(\pi x)) \leq \cos(1)$. *Wat ging daar fout?*

4. Bepaal de derde-orde Taylorveelterm met steunpunt $\frac{\pi}{4}$ van $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. 4 pt.

Uitwerking: De Taylorformule van orde 3 met steunpunt $\frac{\pi}{4}$ is:

$$T(x) = f(\tfrac{\pi}{4}) + f'(\tfrac{\pi}{4})(x - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{\pi}{4})(x - \tfrac{\pi}{4})^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}f'''(\tfrac{\pi}{4})(x - \tfrac{\pi}{4})^3.$$

Hiertoe berekenen we de afgeleiden:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin^{-1} x, \\
f'(x) &= -\sin^{-2} x \cos x, \\
f''(x) &= 2\sin^{-3} x \cos^2 x + \sin^{-1} x, \\
f'''(x) &= -6\sin^{-4} x \cos^3 x - 4\sin^{-2} x \cos x + f'(x).
\end{aligned}$$

We maken gebruik van $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ om snel de volgende waarden uit te rekenen:

$$\begin{aligned}
f(\tfrac{\pi}{4}) &= (\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-1} = \sqrt{2}, \\
f'(\tfrac{\pi}{4}) &= -(\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-2+1} = -\sqrt{2}, \\
f''(\tfrac{\pi}{4}) &= 2(\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-3+2} + (\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-1} = 3\sqrt{2}, \\
f'''(\tfrac{\pi}{4}) &= -6(\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-4+3} - 4(\sqrt{\tfrac{1}{2}})^{-2+1} - \sqrt{2} = -11\sqrt{2},
\end{aligned}$$

zodat

$$T(x) = \sqrt{2} - \sqrt{2}(x - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}(x - \tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{11}{6}\sqrt{2}(x - \tfrac{\pi}{4})^3.$$

Opmerking: differentiëren met de quotiëntregel is hier echt super-ongemakkelijk! Vaak is het makkelijker om de productregel te gebruiken op $f(x)\,g(x)^{-1}$, zeker als f ook nog eens constant is.

5. Evalueer $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$ 4 pt.

Uitwerking: De integrand eerst uitdelen (omdat graad teller > graad noemer):

$$\frac{x^3+3}{x^2+2} = x + \frac{-2x+3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

Zo krijgen we met de somregel voor integralen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3}{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 - \log(x^2+2) + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\arctan\tfrac{x}{\sqrt{2}} + c.
\end{aligned}$$

6. Evalueer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+9x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$ 4 pt.

Uitwerking: *Oplossing 1:* We splitsen

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+9x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x + 9\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

De eerste integraal herkennen we als een arcsinus:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \arcsin(x/2)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \arcsin\tfrac{1}{2} - \arcsin(-\tfrac{1}{2}) \\
&= \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

De tweede integraal heeft een oneven integrand op het symmetrische interval $[-1, 1]$ en evalueert dus tot 0. Conclusie: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+9x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$.

Oplossing 2: We substitueren $x = 2\sin u$, waarbij dan ook $dx = 2\cos u\,du$, en de grenzen -1, 1 gaan dan over in $-\pi/6$, $\pi/6$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1+9x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{(1+18\sin u)}{2\cos u} \cdot 2\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} 1 + 18\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

In de laatste stap is gebruikt dat de integrand bestaat uit een constante plus een oneven functie op een symmetrisch interval om 0; de oneven functie levert dus geen bijdrage aan de integraal. Merk verder op dat op het integratie-interval geldt $\cos u \geq 0$ zodat er geen absolutewaarde in de noemer nodig was.

Varianten die ook goed zijn maar meer tijd kosten:

- als oplossing 2, maar terugsubstitueren in plaats van nieuwe grenzen gebruiken;
- de integraal met de oneven integrand hardcore uitrekenen.

7. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 4 pt.

$$(1+t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y, \qquad y(-2) = -1.$$

Uitwerking: Scheiden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}t}{1+t};$$

daarna integreren:

$$\log|y| = 2\log|1+t| + c;$$

indien we e-machten nemen geeft dit de algemene oplossing

$$y = c(1+t)^2$$

voor een constante $c \in \mathbb{R}$. Beginwaarde invullen leidt tot de vergelijking

$$-1 = c(1-2)^2$$

met oplossing $c = -1$, dus de oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$y = -(1+t)^2.$$

Bizar veel studenten vergeten om hier wat toelichting bij te schrijven, terwijl dat enerzijds wel nodig en anderzijds niet veel werk is!

Ook veel studenten zien over het hoofd dat de d.v. homogeen is. Je hebt dus geen variatie van constante nodig. Het is je makkelijker gemaakt dan je blijkbaar wilt geloven!

8. a. Bepaal de afgeleide van $\arctan \dfrac{x-1}{x+1} - \arctan x$. 3 pt.

Uitwerking: Zij $u = u(x)$ een functie van x. De afgeleide van $\arctan u$ is $\frac{u'}{1+u^2}$. Kiezen we $u = x$ dan krijgen we gewoon $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. Kiezen we $u = \frac{x-1}{x+1}$ dan vinden we

$$u' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2},$$

en dus

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan \frac{x-1}{x+1} &= \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{1+((x-1)/(x+1))^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{2+2x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

zodat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan \frac{x-1}{x+1} - \arctan x\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Kettingregel veel te vaak vergeten, en gemodder met algebraische vaardigheden. Studenten die denken dat arctan *iets te maken heeft met* $\dfrac{\arcsin}{\arccos}$ *dienen de inverse goniofuncties nog beter te bestuderen.*

b. Vereenvoudig $\arctan \dfrac{x-1}{x+1}$ zo ver mogelijk. 3 pt.

Uitwerking: Bij (a) kregen we als afgeleide 0 d.w.z. $\arctan \frac{x-1}{x+1} - \arctan x$ is een constante functie:

$$\arctan \frac{x-1}{x+1} = \arctan x + c.$$

Echter $\frac{x-1}{x+1}$ heeft een discontinuiteit in $x = -1$, zodat we op de twee componenten van het domein $(-\infty, -1)$ en $(-1, \infty)$ afzonderlijk de constante c moeten bepalen.

Voor $x > -1$ bepalen we c bijvoorbeeld door de keuze $x = 0$ in te vullen: dit geeft $c = \arctan(-1) - \arctan 0 = -\frac{\pi}{4}$.

Voor $x < -1$ is er niet zo'n handige keuze mogelijk, daarom nemen we een limiet:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} \arctan \frac{x-1}{x+1} = \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4}; \\ &\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\tfrac{\pi}{2};\end{aligned}$$

zodat

$$c = \lim_{x\to-\infty}\left(\arctan \frac{x-1}{x+1} - \arctan x\right) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Samenvattend,

$$\arctan \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \arctan x - \frac{\pi}{4} \text{ voor } x > -1, \\ \arctan x + \frac{3\pi}{4} \text{ voor } x < -1. \end{cases}$$

De combinatie van het woord "vereenvoudig" met de functie arctan *gaf veel studenten de Pavlovreactie om iets met een rechthoekige driehoek te proberen etc. Dat zou hebben gewerkt voor een* $\arctan(\sin x)$ *of iets dergelijks, maar in deze opgave heb je er helemaal niets aan. Het laatste onderdeel van een infi-tentamen vereist meestal wat dieper inzicht dan simpele Pavlovreacties. Sowieso is het verstandig om je af te vragen of er een verband is tussen de a-vraag en de b-vraag. Tentamen-tactisch bekeken kun je uit de b-vraag vermoeden dat er uit de a-vraag iets moois moet komen.*