Tentamen Bewijzen in de Wiskunde
Dinsdag 8 november 2022

Opgave 1

Geef een voorbeeld van een geïndiceerde collectie $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ van verzamelingen die voldoet aan alle vier de volgende eigenschappen

(a) elke verzameling A_i is eindig;

(b) voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ met $i \neq j$ geldt dat de verzamelingen A_i en A_j een andere kardinaliteit hebben;

(c) de vereniging $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is aftelbaar oneindig; en

(d) de doorsnede $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is de lege verzameling.

en bewijs dat het voorbeeld aan al deze eisen voldoet.

Uitwerking

There are many possible constructions, but one is as follows: for $i \in \mathbf{N}$, set

$$A_i := \{n \in \mathbf{N} \colon n \leq i - 1\}.$$

The set A_i has cardinality $|A_i| = i - 1$, so it is finite. From this formula it is also clear that if $i \neq j$, then $|A_i| \neq |A_j|$.

The union $U := \bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ is equal to $\mathbf{N}$: the inclusion $U \subseteq \mathbf{N}$ is clear since all elements of A_i belong to $\mathbf{N}$; for other direction, it suffices to note that for any $n \in \mathbf{N}$, $n \in A_{n+1}$, and thus, $n \in U$. We conclude that $|U| = |\mathbf{N}|$, and thus, U is countably infinite by definition.

Finally, $\bigcap_{i\in\mathbf{N}} A_i \subseteq A_1 = \emptyset$, so the intersection of all sets A_i is also empty.

Opgave 2

Stel dat P, Q en R uitspraken zijn. Bewijs dat de volgende twee samengestelde uitspraken logisch equivalent zijn

$$P \Rightarrow (Q \vee R) \quad \text{en} \quad (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$$

door middel van een waarheidstabel.

Uitwerking

We bewijzen dat de twee uitspraken logisch equivalent zijn door middel van een waarheidstabel.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

Aangezien de vijfde en achtste kolom van de waarheidstabel overeenkomen, kunnen we concluderen dat de uitspraken $P \Rightarrow (Q \vee R)$ en $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$ logisch equivalent zijn.

Opgave 3

Bewijs met volledige inductie dat

$$n! > n \cdot 2^{n-1}$$

voor alle gehele getallen $n \geq 5$.

Opmerking: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Uitwerking

We bewijzen met volledige inductie dat $n! > n \cdot 2^{n-1}$ voor alle gehele getallen $n \geq 5$.

Inductie basis: Bekijk $n = 5$. We zien dat $5! = 120$, en $5 \cdot 2^{5-1} = 80$. Omdat $120 > 80$, volgt dat $n! > n \cdot 2^{n-1}$ voor $n = 5$.

Inductiehypothese: Stel dat $k! > k \cdot 2^{k-1}$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 5}$.

Inductiestap: Bekijk nu $n = k+1$. We zien dat $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$. Uit de inductiehypothese volgt dat $(k+1) \cdot k! \geq (k+1) \cdot k \cdot 2^{k-1}$. Merk op dat $k \geq 5 > 2$, dus er volgt dat $(k+1) \cdot k \cdot 2^{k-1} > (k+1) \cdot 2 \cdot 2^{k-1} = (k+1) \cdot 2^k$. Al met al zien we dat $(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k$.

We concluderen dat $n! > n \cdot 2^{n-1}$ voor alle gehele getallen $n \geq 5$.

Opgave 4

Zij A een niet-lege verzameling, en laat R_n een equivalentierelatie op A zijn voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definieer de relatie T op A door aTb dan en slechts dan als aR_nb voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs of weerleg dat T een equivalentierelatie is.

(b) Defineer de relatie Q op A door aQb dan en slechts dan als er $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat aR_nb. Bewijs of weerleg dat Q een equivalentierelatie is.

Uitwerking

A relation on a set is an equivalence relation if it is reflexive, symmetric, and transitive.

4(a) The relation T on A is an equivalence relation. To prove this, we show that T is reflexive, symmetric, and transitive.

To show that T is reflexive, let $a \in A$. We need to show that aTa. Let $n \in \mathbb{N}$. Because R_n is an equivalence relation, it is reflexive. So, aR_na. Because this holds for all $n \in N$, it follows that aTa. Hence, T is reflexive.

To show that T is symmetric, let $a, b \in A$ and suppose aTb. We need to show that bTa. By the definition of T, it follows that aR_nb for all $n \in \mathbb{N}$. Because each R_n is an equivalence relation, each R_n is symmetric. So, for each $n \in \mathbb{N}$, we have that bR_na. By the definition of T, it now follows that bTa. Hence, T is symmetric.

To show that T is transitive, let $a, b, c \in A$. Suppose that aTb and bTc. We need to show that aTc. By the definition of T, it follows that aR_nb and bR_nc for all $n \in \mathbb{N}$. Because each R_n is an equivalence relation, each R_n is transitive. So, for each $n \in \mathbb{N}$, we have that aR_nc. By the definition of T, it now follows that aTc. Hence, T is transitive.

Because T is reflexive, symmetric, and transitive, it is an equivalence relation.

4(b) The relation Q is *not* an equivalence relation. We prove this by providing a counterexample that shows that Q is not transitive. There are many possible counterexamples; one is as follows:

Set $A := \mathbb{N}$ and define

$$\begin{aligned} R_1 :=& \{(1,2),(2,1)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,n)\}; \\ R_2 :=& \{(2,3),(3,2)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(n,n)\}; \end{aligned}$$

and for $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$, define $R_n := \{(n,n)\}$. We first show that the relations R_n, $n \in \mathbb{N}$, are all equivalence relations. Let $n \in \mathbb{N}$. The relation R_n is reflexive (since $(m,m) \in R_n$ for all $m \in \mathbb{N}$); it is symmetric (since $(m,\ell) \in R_n$ implies that $(\ell,m) \in R_n$); and it is transitive (since $(m,\ell) \in R_n$ and $(\ell,k) \in R_1$ implies that $(m,k) \in R_n$).

We now have that $(1,2) \in Q$ and $(2,3) \in Q$ (since $(1,2) \in R_1$ and $(2,3) \in R_2$). But, because there is no $n \in \mathbb{N}$ such that $(1,3) \in R_n$, we do not have that $(1,3) \in Q$. So, the relation Q is not symmetric.

For completeness (though it is not necessary for the proof), we show that Q is reflexive and symmetric. Let A be an (arbitrary) set and for $n \in \mathbb{N}$, let R_n be an (arbitrary) equivalence relation on A. To show that Q is reflexive, let $a \in A$. We need to show that aQa (or, equivalently $(a,a) \in Q$). But this follows immediately: For each $n \in \mathbb{N}$, the relation R_n is reflexive, so aR_na. It now follows from the definition of Q that aQa. So, Q is reflexive. To prove that Q is symmetric, let $a, b \in A$ and suppose that aQb. We need to show that bQa. By the definition of Q, there is $n \in \mathbb{N}$ such that aR_nb. Because R_n is symmetric, we have that bR_na. By the definition of Q, it now follows that bQa. So, Q is symmetric.

Opgave 5

Voor elke twee reële getallen a en b, definieer de deelverzameling $S_{(a,b)}$ van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ door

$$S_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; ax + by = 0\}.$$

Voor deze opgave mag u (zonder het bewijs te geven) gebruiken dat $S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$ dan en slechts dan als $ad = bc$.

Beschouw de collectie

$$\mathcal{C} = \{S_{(a,b)} \; : \; a, b \in \mathbb{R}\},$$

van verzamelingen and definieer de functie $f : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ door

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)},$$

voor alle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

(a) Bewijs dat de functie f welgedefiniëerd is; dat wil zeggen, de waarde $f(q)$ van de functie in een rationaal getal $q \in \mathbb{Q}$ hangt niet af van de manier waarop je q als breuk schrijft.

(b) Bewijs dat de functie f injectief is.

(c) Bewijs of weerleg dat de functie f surjectief is.

Uitwerking

<u>Gegeven</u>: Voor de tentamen-opgave mocht zonder bewijs gebruik gemaakt worden van het volgende lemma:

$$\text{Voor alle } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \text{ waarvoor } (a, b) \neq (0, 0) \text{ en } (c, d) \neq (0, 0), \text{ geldt dat}$$
$$S_{(a,b)} = S_{(c,d)} \;\Leftrightarrow\; ad = bc \tag{1}$$

<u>Bewijs</u>: Voor de volledigheid geven we nu eerst een bewijs van dit lemma, ook al werd dit dus NIET van de studenten verwacht voor het tentamen.

$\Rightarrow$ Neem eerst aan dat $S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$ voor zekere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, waarvoor $(a, b) \neq (0, 0)$ en $(c, d) \neq (0, 0)$. Beschouw nu $(x, y) = (d, -c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Daarvoor geldt dan dat $cx + dy = cd - dc = 0$, dus $(d, -c) \in S_{(c,d)}$. Omdat $S_{(c,d)} = S_{(a,b)}$, geldt dus ook dat $(d, -c) \in S_{(a,b)}$ en dus dat $0 = ax + by = ad - bc$. Dat laatste impliceert dat $ad = bc$.

$\Leftarrow$ Neem nu aan dat $ab = bc$ voor zekere $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $(a, b) \neq (0, 0)$ en $(c, d) \neq (0, 0)$. We gaan nu eerst bewijzen dat dan $S_{(a,b)} \subseteq S_{(c,d)}$. Beschouw dus een $(x, y) \in S_{(a,b)}$. Daarvoor geldt dan dat $ax + by = 0$. Minstens één van de getallen a en b moet ongelijk aan nul zijn. We onderscheiden nu de gevallen dat $a \neq 0$ of $b \neq 0$:

- $a \neq 0$: Vermenigvuldiging met c geeft $acx + bcy = 0$, en dus $acx + ady = 0$. Omdat $a \neq 0$ impliceert dit dat $cx + dy = 0$, hetgeen betekent dat $(x, y) \in S_{(c,d)}$.
- $b \neq 0$: Vermenigvuldiging met d geeft $adx + bdy = 0$, en dus $bcx + bdy = 0$. Omdat $b \neq 0$ impliceert dit dat $cx + dy = 0$, hetgeen betekent dat $(x, y) \in S_{(c,d)}$.

We hebben dus bewezen dat in alle gevallen geldt dat $(x, y) \in S_{(c,d)}$ als $(x, y) \in S_{(a,b)}$, dus $S_{(a,b)} \subseteq S_{(c,d)}$. Op vergelijkbare wijze kunnen we bewijzen dat $S_{(c,d)} \subseteq S_{(a,b)}$, waaruit volgt dat $S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$.

Dan volgt nu de uitwerking van de tentamen-opgave, gebruikmakend van dit lemma (1):

(a) <u>Claim</u>: De functie f is welgedefiniëerd.

<u>Bewijs</u>:

- Allereerst merken we op dat elke $q \in \mathbb{Q}$ per definitie te schrijven is als $q = \frac{a}{b}$ voor zekere $a, b \in \mathbb{Z}$, waarbij $b \neq 0$. Dat betekent in het bijzonder dat $(a, b) \neq (0, 0)$ en dus bestaat $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)} \in \mathcal{C}$.

  Het boek beschouwt dit echter niet als onderdeel van welgedefiniëerdheid, dus voor het tentamen werd alleen verwacht om het volgende te bewijzen:

- Beschouw een rationaal getal q dat geschreven kan worden als $\frac{a}{b} = q = \frac{c}{d}$ voor zekere gehele getallen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Dan is $ad = bc$ en dus geldt volgens lemma (1) dat
$$f\left(\tfrac{a}{b}\right) = S_{(a,b)} = S_{(c,d)} = f\left(\tfrac{c}{d}\right).$$
  Dit betekent dat de functie f welgedefiniëerd is.

(b) <u>Claim</u>: De functie f is injectief.

<u>Bewijs</u>: Neem aan dat $f(q) = f(r)$ voor zekere $q, r \in \mathbb{Q}$, zeg $q = \frac{a}{b}$ en $r = \frac{c}{d}$, voor zekere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, met $b \neq 0$ en $d \neq 0$. Dan is
$$S_{(a,b)} = f\left(\tfrac{a}{b}\right) = f(q) = f(r) = f\left(\tfrac{c}{d}\right) = S_{(c,d)}.$$
Volgens lemma (1) volgt hieruit dat $ad = bc$, en dus (omdat $b \neq 0$ en $d \neq 0$) dat
$$q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r.$$
Dus $f(q) = f(r)$ impliceert dat $q = r$; dus de functie f is injectief.

(c) <u>Claim</u>: De functie f is NIET surjectief.

<u>Bewijs</u>: Om te laten zien dat de functie f niet surjectief is, moeten we minstens één element $S_{(c,d)}$ van de collectie $\mathcal{C}$ geven waarvoor er géén rationaal getal $q = \frac{a}{b}$ is waarvoor $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$. Hiervoor zijn vele voorbeelden te geven. Hieronder worden twee representatieve voorbeelden gegeven. Eén daarvan (of iets vergelijkbaars) zou al voldoende zijn:

- Beschouw $S_{(\sqrt{2},1)} \in \mathcal{C}$ en stel dat $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)} = S_{(\sqrt{2},1)}$ voor een zeker rationaal getal $q = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$. Volgens lemma (1) zou dan gelden dat $a \cdot 1 = b \cdot \sqrt{2}$. Dus dan zou $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ een rationaal getal zijn. We weten echter dat $\sqrt{2}$ irrationaal is, dus hiermee is bewezen dat er geen rationaal getal $q = \frac{a}{b}$ kan zijn zodanig dat $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(\sqrt{2},1)}$. De functie f is dus NIET surjectief.

- Beschouw $S_{(1,0)} \in \mathcal{C}$ en stel dat $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)} = S_{(1,0)}$ voor een zeker rationaal getal $q = \frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$. Volgens lemma (1) zou dan gelden dat $a \cdot 0 = b \cdot 1$. Dus $b = 0$, in tegenspraak met het feit dat b de noemer van het rationale getal $\frac{a}{b}$ is. Hiermee is dus bewezen dat er geen rationaal getal $q = \frac{a}{b}$ kan zijn zodanig dat $f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(1,0)}$. De functie f is dus NIET surjectief.

Opgave 6

Zij $a \geq 1$ willekeurig, maar vast, en beschouw de functie

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x^3 - 3x \end{array} .$$

Geef een ε–δ bewijs dat f in a differentieerbaar is.

Opmerking: Je mag in deze opgave geen rekenregels voor limieten gebruiken.

Nederlandse uitwerking

De functie f is dan en slechts dan differentieerbaar in a, als de limiet

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

bestaat. Heb de waarde van de limiet nodig, bereken daarom $f'(a) = 15a^2 - 3$.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig, maar vast. Definieer $\delta := \min(a, \frac{\varepsilon}{A})$ met nog te bepalen $A > 0$. Dan geldt voor alle $x \neq a$ met $|x - a| < \delta$ dat

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (15a^2 - 3) \right| &= |5(x^2 + xa + a^2) - 3 - 15a^2 + 3| \\ &= 5|x - a||x + 2a| \overset{!}{<} \delta \cdot A . \end{aligned}$$

Om A te berekenen gebruik $\delta \leq a$, hierdoor is $0 < x < 2a$. Schat $5|x + 2a| < 20a =: A$ af, waarmee

$$5|x - a||x + 2a| < |x - a| \cdot A < \delta \cdot A \leq \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon .$$

Dit toont aan dat

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 15a^2 - 3$$

en i.h.b. bestaat.

Solution in English

The function f is differentiable at a if and only if the limit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

exists. Do need the value of the limit and compute $f'(a) = 15a^2 - 3$.

For $\varepsilon > 0$ define $\delta := \min(a, \frac{\varepsilon}{A})$ with $A > 0$ to be determined. Then for $x \neq a$ with $|x - a| < \delta$ we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (15a^2 - 3) \right| &= |5(x^2 + xa + a^2) - 3 - 15a^2 + 3| \\ &= 5|x - a||x + 2a| \overset{!}{<} \delta \cdot A . \end{aligned}$$

To detemine A use $\delta \leq a$, whence $0 < x < 2a$. Estimate $5|x + 2a| < 20a =: A$, whence

$$5|x - a||x + 2a| < |x - a| \cdot A < \delta \cdot A \leq \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon .$$

This shows that

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 15a^2 - 3$$

and in particular exists.

Opgave 7

(a) Stel dat A en B verzamelingen zijn zodat $|A| \leq |B|$. Bewijs dat $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Stel dat $|A| = |B|$. Bewijs of weerleg dat $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Uitwerking

(a) Per definitie bestaat er een injectie $f : A \to B$. We definiëren $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ door $g(S) = \{f(s) : \; s \in S\}$. We bewijzen dat g injectief is. Stel $g(S_1) = g(S_2)$. Neem een willekeurige $s \in S_1$. Dan geldt dat $f(s) \in g(S_1)$, dus geldt ook $f(s) \in g(S_2)$. Per definitie van g geldt er dus $f(s) = f(s')$ voor een of andere $s' \in S_2$. Omdat f injectief is volgt $s = s'$. Dus $s \in S_2$. We zien dus dat $S_1 \subseteq S_2$. Analoog geldt ook dat $S_2 \subseteq S_1$ dus $S_1 = S_2$. We concluderen dat g injectief is, dus $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Ja, want als $|A| = |B|$, dan geldt $|A| \leq |B|$ en $|B| \leq |A|$, dus wegens (a) ook dat $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$ en $|\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{P}(A)|$. De stelling van Schröder-Bernstein zegt nu dat $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Als alternatief kan je direct bewijzen dat de functie g van (a) bijectief is.