Tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Dinsdag 8 november 2022, 17:00 - 20:00

Docenten: *Dirk van Bree*, *Gunther Cornelissen*, *Heinz Hanßmann*, *Willemien Kets*, *Niall Taggart*, *Guido Terra-Bleeker* and *Marieke van der Wegen*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zeven opgaven. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Leg je ID kaart op de tafel. Zet je mobiele telefoon uit en stop hem in je tas.
- Het gebruik van communicatie-middelen, telefoons, computers, rekenmachines, boeken of ander cursusmateriaal is niet toegestaan. Wel mag je één vel (A4-formaat, voor- en achterzijde) met zelfgemaakte aantekeningen gebruiken als referentie-materiaal.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen. Tenzij anders aangegeven, mag je elke uitspraak gebruiken die in het cursusboek is bewezen, zonder haar opnieuw te hoeven bewijzen, behalve als de uitspraak (deel van) een opgave in het cursusboek is. Geef het aan als je een resultaat uit het boek gebruikt en ga na dat aan de voorwaarden is voldaan van de stellingen die je gebruikt.
- Het tentamen bestaat uit zeven opgaven die elk voor hetzelfde aantal punten tellen. Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, dan mag je dat resultaat in het vervolg van de opgave wel gebruiken.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. Beide bevatten dezelfde vragen. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.

Instructions in English

- USE A SEPARATE SHEET OF PAPER FOR EACH EXERCISE. The exam consists of seven problems. Write your name and student number on each sheet.
- Put your ID card on the table. Turn off your cell phone and put it in your bag.
- The use of means of communication, telephones, computers, calculators, books or other course materials is not permitted. You may, however, use a sheet of paper (A4 format, front and back) with notes you have made yourself as reference material.
- Do not just give answers, but show clearly how you arrived at your answers for each (partial) problem and prove all your claims. Unless otherwise stated, you may use any statement proven in the course book without having to prove it again, unless the statement is (part of) an exercise in the course book. Indicate if you use a result from the book and check that the conditions of the statements you use have been met.
- The exam consists of seven questions, each of which carries the same weight for the final grade. Even if you cannot prove a part of a problem, you may use that result in the rest of the problem.
- This exam contains a DUTCH and an ENGLISH VERSION. **The English version follows after the Dutch version. Both comprise the same questions.**

Nederlandse versie

Opgave 1 (nieuw vel papier)

Geef een voorbeeld van een geïndiceerde collectie $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ van verzamelingen die voldoet aan alle vier de volgende eigenschappen:

(a) elke verzameling A_i is eindig;

(b) voor alle $i, j \in \mathbb{N}$ met $i \neq j$ geldt dat de verzamelingen A_i en A_j een andere kardinaliteit hebben;

(c) de vereniging $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is aftelbaar oneindig; en

(d) de doorsnede $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is de lege verzameling.

en bewijs dat het voorbeeld aan al deze eisen voldoet.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Stel dat P, Q en R uitspraken zijn. Bewijs dat de volgende twee samengestelde uitspraken logisch equivalent zijn

$$P \Rightarrow (Q \vee R) \quad \text{and} \quad (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$$

door middel van een waarheidstabel.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Bewijs met volledige inductie dat

$$n! > n \cdot 2^{n-1}$$

voor alle gehele getallen $n \geq 5$.

Opmerking: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Zij A een niet-lege verzameling, en laat R_n een equivalentierelatie op A zijn voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definieer de relatie T op A door aTb dan en slechts dan als aR_nb voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs of weerleg dat T een equivalentierelatie is.

(b) Defineer de relatie Q op A door aQb dan en slechts dan als er $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat aR_nb. Bewijs of weerleg dat Q een equivalentierelatie is.

Z.O.Z.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Definieer voor elke twee reële getallen a en b de deelverzameling $S_{(a,b)}$ van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ door

$$S_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; ax + by = 0\}.$$

Voor deze opgave mag u (zonder het bewijs te geven) gebruiken dat $S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$ dan en slechts dan als $ad = bc$.

Beschouw de collectie

$$\mathcal{C} = \{S_{(a,b)} \; : \; a, b \in \mathbb{R}\},$$

van verzamelingen and definieer de functie $f : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ door

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)},$$

voor alle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

(a) Bewijs dat de functie f welgedefiniëerd is; dat wil zeggen, de waarde $f(q)$ van de functie in een rationaal getal $q \in \mathbb{Q}$ hangt niet af van de manier waarop je q als breuk schrijft.

(b) Bewijs dat de functie f injectief is.

(c) Bewijs of weerleg dat de functie f surjectief is.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Zij $a \geq 1$ willekeurig, maar vast, en beschouw de functie

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5x^3 - 3x \end{array}.$$

Geef een ε–δ bewijs dat f in a differentieerbaar is.

Opmerking: Je mag in deze opgave geen rekenregels voor limieten gebruiken.

Opgave 7 (nieuw vel papier)

(a) Stel dat A en B verzamelingen zijn zodat $|A| \leq |B|$. Bewijs dat $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Stel dat $|A| = |B|$. Bewijs of weerleg dat $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING OP VOLGENDE PAGINAS - END OF DUTCH VERSION - ENGLISH TRANSLATION ON SUBSEQUENT PAGES

English Version

Exercise 1 (new sheet of paper)

Define an indexed collection $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of sets that satisfies all of the folllowing four properties:

(a) all sets A_i are finite;

(b) for all $i, j \in \mathbb{N}$ such that $i \neq j$, the sets A_i and A_j have different cardinality;

(c) the union $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is denumerable; and,

(d) the intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ is the empty set.

and prove that the example meets all these requirements.

Exercise 2 (new sheet of paper)

Let P, Q, and R be statements. Show that the following two compound statements

$$P \Rightarrow (Q \vee R) \quad \text{and} \quad (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R),$$

are logically equivalent by using a truth table.

Exercise 3 (new sheet of paper)

Prove by Mathematical Induction that

$$n! > n \cdot 2^{n-1}$$

for all natural numbers $n \geq 5$.

Note: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

Exercise 4 (new sheet of paper)

Let A be a nonempty set, and for $n \in \mathbb{N}$, let R_n be an equivalence relation on A.

(a) Define a relation T on A by aTb if and only if aR_nb for all $n \in \mathbb{N}$. Prove or disprove that T is an equivalence relation on A.

(b) Define a relation Q on A by aQb if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that aR_nb. Prove or disprove that Q is an equivalence relation on A.

Z.O.Z. / P.T.O.

Exercise 5 (new sheet of paper)

For any two real numbers a and b, define the subset $S_{(a,b)}$ of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ as

$$S_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; ax + by = 0\}.$$

You may use (without providing a proof) the fact that $S_{(a,b)} = S_{(c,d)}$ if and only if $ad = bc$. Next, consider the collection

$$\mathcal{C} = \{S_{(a,b)} \;:\; a, b \in \mathbb{R}\},$$

of sets and define the function $f : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ by

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = S_{(a,b)},$$

for any $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

(a) Prove that the function f is well-defined; that is, the value $f(q)$ of the function at a rational number $q \in \mathbb{Q}$ does not depend on the representation of q as a fraction.

(b) Prove that the function f is injective.

(c) Prove or disprove that the function f is surjective.

Exercise 6 (new sheet of paper)

Let $a \geq 1$ be arbitrary, but fixed, and consider the function

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5x^3 - 3x \end{array}.$$

Give an ε–δ proof that f is differentiable at a.

Note: You may not use any limit laws in this problem.

Exercise 7 (new sheet of paper)

(a) Suppose A and B are sets such that $|A| \leq |B|$. Prove that $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

(b) Suppose now that $|A| = |B|$. Prove or disprove that $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

EINDE TENTAMEN - END OF EXAM