Nakijkmodel hertentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Dinsdag 20 december 2022, 17:00 - 20:00

Docenten: *Dirk van Bree*, *Gunther Cornelissen*, *Heinz Hanßmann*, *Willemien Kets*, *Niall Taggart*, *Guido Terra-Bleeker* and *Marieke van der Wegen*

Opgave 1

Stel dat P, Q en R uitspraken zijn. Bewijs dat de volgende twee samengestelde uitspraken logisch equivalent zijn

$$(P \iff Q) \implies R,$$

en

$$(\, P \wedge (\sim Q)\,) \;\vee\; (\,(\sim P) \wedge Q\,) \;\vee\; R,$$

door middel van een waarheidstabel.

Uitwerking:

We bewijzen dat de twee uitspraken logisch equivalent zijn door middel van de waarheidstabel

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R$	$P \wedge (\sim Q)$	$(\sim P) \wedge Q$	I	II
T	T	T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	F	F	F

waar I staat voor $(P \wedge (\sim Q)) \vee ((\sim P) \wedge Q)$ en II voor $I \vee R$. Aangezien de vijfde en negende kolom van de waarheidstabel overeenkomen, kunnen we concluderen dat de twee uitspraken $(P \iff Q) \implies R$ en $(P \wedge (\sim Q)) \vee ((\sim P) \wedge Q) \vee R$ logisch equivalent zijn.

Opgave 2

Zij $(a, b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en beschouw de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^3$:

$$V_{(a,b)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\}$$

(a) Bewijs dat

$$\bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \mathbb{R}^3.$$

(b) Bewijs dat

$$\bigcap_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} V_{(a,b)} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Uitwerking:

Proof of (a) This follows because $V_{(0,0)} = \mathbb{R}^3$.

An alternative proof is as follows: By definition, $V_{(a,b)} \subseteq \mathbb{R}^3$ for all $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. To prove the reverse inclusion, let $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. If $x = y = 0$ then $(x,y,z) \in V_{(a,b)}$ for all $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. So it remains to consider the cases where $x \neq 0$ or $y \neq 0$. Suppose $x \neq 0$. If we set $a = -y/x$ and $b = 1$, then $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ and $(x,y,z) \in V_{(a,b)}$. The proof for the case $y \neq 0$ is similar.

Proof of (b) We first show that $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \subseteq \bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)}$. Let $z \in \mathbb{R}$. Then, for every $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(0,0,z) \in V_{(a,b)}$. We next show that $\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} V_{(a,b)} \subseteq \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Suppose that $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ is such that $(x,y,z) \in V_{(a,b)}$ for all $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Then, in particular, $(x,y,z) \in V_{(1,-1)}$ and $(x,y,z) \in V_{(1,1)}$ and thus $x - y = 0$ and $x + y = 0$. But this can hold only if $x = y = 0$.

Opgave 3

In deze opgave beschouwen we twee gehele getallen $a, b \in \mathbb{Z}$. Bewijs nu voor elke $x \in \mathbb{Z}$ dat

$$x \equiv a \pmod 3 \qquad \wedge \qquad x \equiv b \pmod 4$$

dan en slechts dan als

$$x \equiv 4a - 3b \pmod{12}.$$

Uitwerking:

<u>Gegeven</u>: Twee gehele getallen $a, b \in \mathbb{Z}$.

<u>Te bewijzen</u>: Voor elke $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$x \equiv a \pmod 3 \quad \wedge \quad x \equiv b \pmod 4 \tag{1}$$

dan en slechts dan als

$$x \equiv 4a - 3b \pmod{12}. \tag{2}$$

<u>Bewijs</u>: We moeten deze bi-implicatie in beide richtingen bewijzen.

- $\Rightarrow$ We beginnen met de implicatie (1) $\Rightarrow$ (2). Neem dus aan dat $x \equiv a \pmod 3$ en $x \equiv b \pmod 4$, voor een zekere $x \in \mathbb{Z}$. Dat betekent dat $3 \mid x - a$ en $4 \mid x - b$, dus er zijn $k, l \in \mathbb{Z}$ zodanig dat

  $$\begin{aligned} x - a &= 3\,k, \\ x - b &= 4\,l. \end{aligned}$$

  Als we de eerste vergelijking vermenigvuldigen met 4 en de tweede met 3, en vervolgens van elkaar aftrekken, dan krijgen we

  $$\begin{array}{c} 4x - 4a = 12\,k \\ 3x - 3b = 12\,l \\ \hline x - 4a + 3b = 12 \cdot (k - l) \end{array} \; -$$

  Omdat $k - l \in \mathbb{Z}$ een geheel getal is, volgt hieruit dat $12 \mid x - (4a - 3b)$, en dus dat $x \equiv 4a - 3b \pmod{12}$.

$\Leftarrow$ Vervolgens bewijzen we de omgekeerde implicatie (2) $\Rightarrow$ (1). Nu nemen we dus aan dat $x \equiv 4a - 3b \pmod{12}$, voor een zekere $x \in \mathbb{Z}$. Dat betekent dat $12 \mid x - (4a - 3b)$, dus er is een $k \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $x - 4a + 3b = 12k$. Hieruit volgt dat

$$x - a = 12k + 3a - 3b = 3 \cdot (4k + a - b), \text{en}$$
$$x - b = 12k + 4a - 4b = 4 \cdot (3k + a - b).$$

Omdat $4k + a - b \in \mathbb{Z}$ en $3k + a - b \in \mathbb{Z}$ beide gehele getallen zijn, concluderen we hieruit dat $3 \mid x - a$ en $4 \mid x - b$, en dus dat $x \equiv a \pmod 3 \wedge x \equiv b \pmod 4$.

QED

Opgave 4

Bewijs dat

$$5^{2^n} \equiv 5^{2^{n-1}} \bmod 2^{n+1},$$

voor alle natuurlijke getallen n.

Opmerking: $5^{2^n} = 5^{(2^n)} \neq (5^2)^n$.

Uitwerking:

The proof is by induction w.r.t. n. The base case $n = 1$ means $5^2 \equiv 5 \bmod 4$, which is true. Assume that the statement is true for $n = k$. We now prove that the statement is then also true for $n = k + 1$. The assumption says $5^{2^k} = 5^{2^{k-1}} + 2^{k+1}q$ for some integer $q \in \mathbf{Z}$. If we square both sides, we find that $5^{2^{k+1}} = 5^{2^k} + 2 \cdot 5^{2^{k-1}} 2^{k+1} q + 2^{2k+2} q^2 = 5^{2^k} + 2^{k+2} m$ for the integer $m = 5^{2^{k-1}} q + 2^{k+2} q^2$.

(Alternatively, note that $5^{2^{k+1}} - 5^{2^k} = (5^{2^k})^2 - (5^{2^{k-1}})^2 = (5^{2^k} - 5^{2^{k-1}})(5^{2^k} + 5^{2^{k-1}})$; by induction the first factor is divisible by 2^{k+1}, and the second factor, as a sum of two odd numbers, is always divisible by 2, hence the entire expression is divisible by 2^{k+2}.)

Opgave 5

(a) Bekijk de functie $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeven door $f(n) = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor = n\}$. Bewijs dat f injectief is.

(b) Bewijs dat de functie van vraag (a) niet surjectief is.

Uitwerking:

Opgave a.

- Goed gebruik definitie injectiviteit.
- Stel $f(m) = f(n)$.
- Merk op $n \in f(n)$.
- Dan ook $n \in f(m)$.
- Dus $n = \lfloor n \rfloor = m$.

Opgave b, oplossing 1.

- Vind een $S \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ met $S \notin \operatorname{im}(f)$ (bewijs niet nodig).
- Stel $S = f(n)$.
- Vind $x \in S$, concludeer $n = \lfloor x \rfloor$.
- Een van de volgende alternatieven: (1) Vind $y \in S$ met $\lfloor y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor$ of (2) Vind $y \notin S$ met $\lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
- Tegenspraak.

Opgave b, oplossing 2.

- Weten dat $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
- Weten dat $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.
- Deze twee combineren geeft $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$. (Vervelende technische stap, Schröder-Bernstein nodig.)
- Dus er is geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- Als we (a) gebruiken zien we dus dat f niet bijectief kan zijn.

Opgave 6

Stel dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij reële getallen is waarvan de limiet L is. Bewijs dat voor een vast positief reëel getal c, de rij $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert, en bepaal de limiet.

1 Uitwerking:

Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real numbers which converges to a limit, L. For a postivie real number c we claim that the sequence $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to cL.

Strategy: For every $\varepsilon > 0$ we have to find $N \in \mathbb{N}$ such that if $n > N$ then

$$|cx_n - cL| < \varepsilon.$$

Observe that $|cx_n - cL| = c|x_n - L|$, and since the sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to L, we can find a N such that for $n > N$ we have that $|x_n - L| < \varepsilon$. It follows that for every $\varepsilon > 0$ convergence of $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ guarantees the existence of $N \in \mathbb{N}$ such that

$$|cx_n - cL| = c|x_n - L| < c\varepsilon.$$

This is almost what we want, we just have to deal with the factor of c attached to ε. To do this, note that since $\varepsilon > 0$ and c is positive, we have that $\frac{\varepsilon}{c} > 0$, and we could just as well use $\frac{\varepsilon}{c}$ in place of ε.

Proof: Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of real numbers which converges to a limit, L. For a postivie real number c we claim that the sequence $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to cL. For every $\varepsilon > 0$, we have that $\frac{\varepsilon}{c} > 0$. Since $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to L it follows that there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for every $n > N$,

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

It follows that for $n > N$,

$$|cx_n - cL| = c|x_n - L| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

It follows that the sequence $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to cL.

Opgave 7

Laat A en B verzamelingen zijn. Stel dat $|A \cup B| = |A \cap B|$. Bewijs dat $|A| = |B|$.

Uitwerking:

Er zijn verschillende antwoorden mogelijk, hieronder staat een voorbeeld.

<u>Bewijs</u>: We weten dat

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

Dus er geldt dat

$$|A \cap B| \leq |A| \leq |A \cup B|.$$

Omdat $|A \cup B| = |A \cap B|$, volgt dat $|A| \leq |A \cap B|$. Uit de stelling van Schöder-Bernstein volgt dat $|A| = |A \cap B|$.

Analoog volgt dat $|B| = |A \cap B|$. We concluderen dat $|A| = |B|$.